REAPPROVISIONNEMENT AUTOMATIQUE EN COMBUSTIBLE

par
Pierre Trudeau

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès Sciences (M. Sc.)

Ce mémoire a été publié grâce à une subvention du Fonds
F.C.A.C. pour l'aide et le soutien à la recherche.

Université de Montréal
Centre de recherche sur les transports - Publication #347
Avril 1984

Dépôt légal - 3e trimestre 1984

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE vii

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I - L'ÉTAT ACTUEL DE LA RECHERCHE 7

I.1 INTRODUCTION 7

I.2 LA SITUATION DANS L'ENTREPRISE PRIVÉE 8

I.2.1 Estimation de la consommation 8
I.2.2 Stratégie de l'entreprise 10

I.3 REVUE DE LA LITTÉRATURE 14

CHAPITRE II - LES DONNÉES 17

II.1 LES CLIENTS 17

II.1.1 Capacité des réservoirs (r_i) 18
II.1.2 Taux de consommation moyen (μ_i) 19
II.1.3 Ecart-type du taux de consommation (σ_i) 20

II.2 LA FLOTTE DE CAMIONS 21

II.2.1 La capacité des camions (q_i) 21
II.2.2 Nombre de camions (NC) 22
II.2.3 Nombre d'heures travaillées (H) 22
II.2.4 Temps de livraison 22

II.3 LE RÉSEAU 23

II.4 CONDITIONS INITIALES 24

II.5 PÉRIODE DE SIMULATION 25

CHAPITRE III - LA PREMIÈRE APPROCHE 29

III.1 INTRODUCTION 29

III.2 L'ALGORITHME 30

III.3 L'OBJECTIF À MINIMISER 31

III.4 FORMULATION DÉTAILLÉE, JUSTIFICATION ET IMPLANTATION DE L'ALGORITHME 33

III.4.1 L'étape 1 35

III.4.2 L'étape 2 41

III.4.3 Le 2-OPT 44
III.4.4 L'ajout 50
III.4.5 Echanges un pour un 53
III.4.6 Mise à jour 58

CHAPITRE IV - LE CHOIX DES CLIENTS ET LA FONCTION ÉCONOMIQUE 61

IV.1 NOTIONS PROBABILISTES 61

IV.2 LE CHOIX DES CLIENTS 70

IV.2.1 Approche proposée 71
IV.2.2 Calcul du SC 73

IV.3 LA FONCTION ÉCONOMIQUE 79

IV.3.1 Quelques approches possibles 80
IV.3.2 La version finale 91

IV.4 LES COÛTS DE TRANSPORT ET LA DEFINITION DE $EC_i(0)$. 102

CHAPITRE V - LA DEUXIÈME APPROCHE 111

V.1 INTRODUCTION 111

V.2 L'ALGORITHME 112

V.3 FORMULATION DÉTAILLÉE, JUSTIFICATION ET IMPLANTATION DE L'ALGORITHME 114

V.3.1 L'étape 1 115
V.3.2 L'étape 2 117
V.3.3 L'étape 3 118

V.3.3.1 la formulation mathématique 118
V.3.3.2 résolution générale 122
V.3.3.3 résolution de (PA) 123
V.3.3.4 remplacement implicite de la contrainte (5.12) 140
V.3.3.5 solution complète à partir de la solution initiale 144
V.3.3.6 l'ajout 144
V.3.3.7 le r-OPT 147

CHAPITRE VI - LES RÉSULTATS 173

VI.1 LA PREMIÈRE APPROCHE AVEC QUATRE(4) VÉHICULES 173

VI.2 LA PREMIÈRE APPROCHE AVEC TROIS(3) VÉHICULES 177

VI.3 LA SECONDE APPROCHE AVEC TROIS(3) VÉHICULES 178

CHAPITRE VII - CONCLUSION 183

RÉSUMÉ DU VOCABULAIRE ET DES NOTATIONS UTILISÉS 185

REMERCIEMENTS 191

BIBLIOGRAPHIE 194

SOMMAIRE

Le problème est celui d'une entreprise disposant d'une flotte de véhicules pour réapprovisionner automatiquement ses clients. La distribution est automatique dans le sens que les clients n'ont pas à placer une commande. Pour déterminer les moments propices de réapprovisionnement des clients, l'entreprise doit estimer la consommation de ces derniers qui peut dépendre d'un facteur stochastique comme la température. Elle doit également disposer d'informations sur le niveau de réserve et sur les habitudes de consommation de ses clients. D'autre part, à chaque jour l'entreprise doit définir des parcours de distribution pour ses véhicules. Les clients desservis chaque jour sont sélectionnés en fonction de leur risque de pénurie et de leur situation géographique par rapport aux parcours.

Deux modèles sont présentés de même que des résultats numériques préliminaires. Le premier modèle suppose un réapprovisionnement complet du client lorsqu'il est desservi, alors que dans le second un réapprovisionnement partiel est accepté pour permettre de desservir plus de clients en période de forte consommation.

INTRODUCTION

S'il est un problème classique dans la jeune discipline de la recherche opérationnelle, c'est bien celui du voyageur de commerce. Cela tient, en partie, à la simplicité de son énoncé:

> *"étant donné n points et un ensemble d'arcs reliant ces points (le tout formant un réseau) déterminer un cycle (i.e. trajet du voyageur de commerce) de coût minimal passant par chacun des n points une et une seule fois (le coût attribué à un arc étant par exemple la distance reliant ses deux (2) extrémités)".*

Même le non-initié sait tout de suite de quoi il s'agit et peut s'y attaquer, mais derrière cette simplicité se cache, on le sait, un problème fort complexe ("NP-complet" de fait [9]).

Comme cela est fréquent en sciences, c'est précisément cette complexité qui a suscité l'intérêt des chercheurs qui, loin d'être rebutés, ont au contraire composé sur ce thème les variantes les plus diverses:

- plusieurs voyageurs de commerce pour desservir les n clients;

- plusieurs dépots, i.e. que les voyageurs de commerce ne sont plus basés en un seul lieu (dépot);

- ajout d'une demande en chacun des n points (ces points sont considérés des clients) et d'une flotte de camions pour faire le service ("Vehicule routing problem") avec contraintes de capacité des camions et possiblement de durée des parcours, etc...;

- etc... (pour la définition de ces problèmes et une liste complète de références, voir [2]).

Il va sans dire, que ces variantes ne simplifient en rien le problème original.

Malgré tous ces développements, ce n'est que tout récemment que l'on introduisit la notion de demande stochastique en chacun des points du réseau. Pour ces problèmes, l'on ne connaît plus de façon exacte la demande de chaque client, elle varie selon une certaine loi de probabilité et par conséquent on ne peut que l'estimer. Un tel phénomène est monnaie courante dans la réalité, on a qu'à penser aux appels reçus par la police, les pompiers, le service ambulancier, ou la demande de sang des hopitaux, etc.... De fait, on en vient à penser que ce type de problème est plus fréquent que celui avec demande déterministe. Bien souvent d'ailleurs, on a préféré s'y attaquer en les modifiant de façon à les rendre déterministes puis utiliser des méthodes connues et éprouvées. Nous avions pour notre part le préjugé inverse de conserver l'aspect stochastique tout au long de l'algorithme. En agissant ainsi on ne perd aucune information et nous nous attendions à des solutions plus "continues". Les hypothèses que l'on doit poser pour rendre les choses déterministes induisent souvent des solutions de type "tout ou rien".

Le problème faisant l'objet de ce mémoire fait partie de cette classe de problèmes où la demande est stochastique, en voici l'énoncé:

Une entreprise fait la livraison de mazout domestique pour un marché résidentiel. Elle s'engage, auprès de ses clients, à les fournir en combustible de telle sorte qu'en aucun temps ils ne viennent à en manquer. Pour ce faire, elle dispose d'une flotte de camions, chacun ayant une capacité fixe de mazout (et donc limitée) et de chauffeurs ne pouvant travailler qu'un nombre limité d'heures par jour.

Tous ces camions sont localisés à un seul dépot où ils font le plein et d'où origine et se termine chaque boucle de livraison. Un même chauffeur peut revenir faire le plein au dépot et ainsi parcourir plus d'une boucle par jour, en autant que les autres contraintes le permettent. Chaque client, est caractérisé par:

- la capacité de son réservoir;
- sa situation géographique;
- son taux de consommation moyen.

Le niveau du réservoir d'un client n'est connu qu'au moment d'une livraison alors que le chauffeur est à même de le mesurer, le reste du temps il est inconnu.

L'entreprise doit donc quotidiennement résoudre un certain nombre de problèmes, à savoir déterminer:

- quels seront les clients visités;
- par quel chauffeur sera desservi chaque client;

- l'ordre dans lequel les clients seront visités.

On suppose que l'entreprise dispose d'une quantité illimitée de mazout. Seules les contraintes de capacité des camions et du nombre maximum d'heures de travail quoditien pour les chauffeurs, limitent le nombre de clients qu'il est possible de visiter et la quantité de mazout que l'on peut déverser chaque jour.

L'entreprise désire respecter ses engagements et faire en sorte qu'aucun client ne vienne à manquer de combustible, mais bien sûr elle souhaite le faire à un moindre coût. Or quels sont les coûts en jeu?

1) La flotte et le nombre de chauffeurs étant fixes, les salaires versés à ces derniers représentent une dépense fixe pour une période donnée.

2) Chaque fois qu'un client est visité, des coûts sont associés au déplacement occasionné: essence consommée par le camion, amortissement du camion, entretien, etc... .

3) Si malgré toutes les précautions prises, un client venait à manquer de combustible (on parlera de pénurie) l'entreprise devrait faire une livraison spéciale pour lui, ce qui signifie:

i) le coût d'un voyage aller-retour uniquement pour ce client (on met les choses au pire);

ii) du temps supplémentaire payé à un chauffeur pour cette livraison (encore une fois on met les choses au pire en supposant que la pénurie survient à un moment où l'on doit payer du temps supplémentaire,

par exemple la nuit);

iii) le risque de perdre le client suite à son insatisfaction.

Que retenir de cette structure de coûts? Il apparaît clairement que l'entreprise doit adopter une politique de compromis: d'une part, les coûts de type 2) tendent à réduire le nombre de visites faites à un client, et de l'autre, les coûts de pénurie de type 3) incitent à la tendance inverse. Un aspect important de ce travail est précisément de tenir compte de ce compromis et de tenter de le modéliser mathématiquement.

Le chapitre I présente une approche de solution utilisée dans l'industrie privée et une revue des travaux publiés sur le sujet, puis conclut par une brève présentation des deux (2) approches que nous avons développées.

Les données utilisées et comment elles ont été obtenues font l'objet du chapitre II, tandis que le chapitre III expose la première approche. Le chapitre IV comporte le développement probabiliste nécessaire au chapitre V qui lui présente les détails de la deuxième approche.

Les résultats pour les deux approches sont résumés au chapitre VI et la conclusion se retrouve au chapitre VII. La bibliographie et un résumé des notations et du vocabulaire utilisé sont en annexe.

Enfin, nous nous permettons d'insister sur la portée de ce mémoire qui est avant tout, le développement d'approches de base au problème,

et à sa modélisation. Nous l'avons déjà écrit, bien peu a été fait sur le sujet. Il ne s'agit pas ici de polir une pièce particulière d'un algorithme déjà bien rodé mais bien de défricher des avenues inexplorées. Aussi, l'accent n'a-t-il pas été mis sur l'efficacité diabolique de chaque composante des algorithmes développés, mais plutôt sur l'obtention de solutions réalisables à ce complexe problème, par des voies originales qui pourront, et devront si cela en vaut la peine, être fignolées par des travaux subséquents.

CHAPITRE I

L'ÉTAT ACTUEL DE LA RECHERCHE

I.1 INTRODUCTION

Si le processus était déterministe, tout se simplifierait grandement. En connaissant exactement la consommation quotidienne de chaque client dans le futur, il suffirait de calculer le jour où surviendrait la pénurie et de visiter le client la veille. On éviterait toutes les situations de pénurie en plus de faire le plus petit nombre de visites pour une période donnée (un an par exemple). Il resterait à s'assurer que les contraintes de capacité et de temps nous permettent à chaque jour de visiter et d'emplir le réservoir de tous ces clients en instance de pénurie le lendemain. Dans l'affirmative, nous n'aurions plus qu'à construire des routes visitant ces clients et minimisant les distances parcourues. Le problème se réduirait à solutionner une variante du problème du voyageur de commerce d'où l'aspect probabiliste serait éliminé. Dans le cas contraire, il faudrait prévoir un mécanisme déplaçant la visite d'une partie de ces clients à des jours antérieurs.

Bien qu'aucun de ces problèmes ne soit particulièrement facile, nous aurions tout de même grandement simplifié le problème original. Malheureusement, nul n'est devin en ce domaine, et l'entreprise privée

pas plus que nous ne connait la consommation quotidienne exacte de chaque client.

I.2 LA SITUATION DANS L'ENTREPRISE PRIVÉE

Reste-t-on pour autant démuni? L'entrepreneur privé doit faire face au problème. Bonne ou mauvaise, il doit, pour opérer, avoir une solution au problème. Comment fonctionne-t-il en général? Il est assez difficile de le savoir et cela s'explique: dans un contexte où le chauffage traditionnel au mazout est fortement remis en question et où de nouveaux modes (électricité, gaz naturel, énergie solaire, chauffage mixte) cherchent férocement à se tailler une place, tout renseignement devient hautement confidentiel et ne doit surtout pas tomber entre les mains d'un compétiteur.

Après quelques vaines tentatives, une seule entreprise a bien voulu nous rencontrer et nous livrer dans les grandes lignes sa façon de procéder. Nous n'avons cependant pas pu obtenir de données sur les clients, et avons dû nous contenter de les simuler (voir le chapitre II). Dans la section qui suit, l'expression "entreprise" réfère à l'entreprise particulière que nous avons rencontrée.

I.2.1 Estimation de la consommation

L'on ne connaît le niveau exact du réservoir d'un client qu'au moment d'une livraison. Par la suite, et jusqu'à la prochaine livraison

on ne peut qu'estimer ce niveau en estimant la consommation quotidienne du client. L'entreprise compile ces estimés de consommation selon le modèle suivant. Une maison perd de la chaleur dès que la température extérieure devient inférieure à environ $18^{o}C$, d'où la notion de degré-jour (DJ):

DÉFINITION 1.1. Une température de $1^{o}C$ inférieure à $18^{o}C$ durant une journée, équivaut à 1 DJ.

Exemple: Si de 00h01 à 06h00 il fait $15^{o}C$, de 06h00 à 18h00 if fait $20^{o}C$, de 20h00 à 24h00 il fait $10^{o}C$; alors le nombre de DJ pour cette journée sera de:

$$(18-15) \times \frac{6}{24} + 0 \times (\frac{18-6}{24}) + (18-10) \times \frac{24-20}{24} = 2.08 \text{ DJ} .$$

Bien sûr, la température seule n'explique pas tout de la consommation d'un client. Le vent, le fait que la maison soit ou non occupée, sa situation etc... sont autant de facteurs qui influencent cette consommation et dont la notion de DJ ne tient pas compte. Par contre, les paramètres de la distribution de la consommation par DJ pour le client i , peuvent être estimés pour refléter ces facteurs. Comme nous ne possédons pas de renseignements sur ces autres facteurs et comme l'industrie pétrolière est satisfaite de ce modèle, nous nous en sommes contentés.

I.2.2 Stratégie de l'entreprise

Pour chaque client, l'entreprise conserve l'historique des livraisons précédentes, et à partir des trois (3) dernières, elle établit une moyenne de consommation. A chaque jour, l'entreprise reçoit d'une station météorologique le nombre de DJ pour la journée précédente. Ce nombre est une approximation du nombre réel de DJ . A Dorval, par exemple, on utilise la formule suivante:

t^j_{max} = température maximale au cours du jour j (en celsius)

t^j_{min} = température minimale au cours du jour j (en celsius)

$$DJ_j = \max(0 \ , \ 18 - (\frac{t^j_{max} + t^j_{min}}{2})) \ .$$

Une station météorologique américaine utilise une approximation un peu plus complète, divisant la journée en quatre (4) parties égales et supposant la température constante au cours de chaque partie. Ayant pu obtenir les données de la station américaine ce sont celles que nous avons utilisées.

Idéalement, on l'a vu, l'entreprise voudrait visiter chaque client la veille de sa pénurie, permettant ainsi un nombre minimal de visites. En raison de l'incertitude sur la consommation, cela n'est pas possible mais l'entreprise a établi une politique qui s'inscrit dans la même ligne de pensée et qui consiste à visiter un client lorsque son réservoir atteint un certain seuil critique (noté ci-après SC). Plus

précisément, dès que les estimés de consommation journalière indiquent que le réservoir du client i n'est plus qu'à P% de sa capacité totale, on visitera ce client cette même journée (si possible, i.e. s'il n'y a pas trop de tels clients au cours de cette même journée) et on emplira complètement son réservoir. Le seuil P% est le même pour tous les clients et est environ de 30%.

Voici quelques commentaires sur cette politique:

1. Bien qu'un SC de P% égal pour tous les clients soit simple à administrer, cela ne semble pas approprié. Les clients sont loin de tous consommer au même taux moyen (μ_i) (voir le chapitre II) de sorte que P% du réservoir pour un client moyen peut représenter disons cinq (5) jours de marge de sécurité avant la pénurie (en moyenne) alors que pour un client générant plus d'incertitude, cela ne représente que deux (2) jours. Si l'entreprise veut se protéger efficacement contre la pénurie pour <u>tous</u> les clients elle devra fixer P% en fonction du client au comportement <u>le plus</u> incertain. Un client plus prévisible sera par conséquent visité beaucoup plus souvent que nécessaire puisque P% est trop élevé pour lui. En revanche, si elle choisit un P% moyen, elle s'expose à des pénuries fréquentes de la part des moins prévisibles. On verra que le rapport $\frac{\sigma}{\mu}$ mesure cette incertitude.

2. La politique d'affectation des clients aux jours de livraison est statique et myope car elle ne dépend uniquement que du jour où P% est atteint. En utilisant une politique plus dynamique on pourrait sûrement

réaliser des économies. En effet, supposons par exemple qu'un horaire et des routes soient établis pour le jour J et qu'un client i, dont le SC ne sera atteint qu'au jour suivant J+1, soit situé le long du chemin (i.e. n'occasionnant aucun détour) d'une route pour le jour J. Selon cette politique statique, le chauffeur ne s'arrêtera pas pour livrer le client i au jour J, même si un détour important était requis pour le desservir le jour J+1.

3. L'entreprise emplit toujours complètement le réservoir d'un client visité. Elle se dit que tant qu'à visiter un client aussi bien remplir son réservoir complètement pour réduire le nombre de visites. Ce principe est sûrement valable dans la majorité des cas. Supposons que survienne une vague de froid prolongée telle que le nombre de clients à visiter chaque jour dépasse les capacités de la flotte. On peut (et dans certains cas on n'a pas le choix) avoir recours au temps supplémentaire ou à la location de camions, mais on peut également régler une partie du problème en n'emplissant pas complètement le réservoir de tous les clients visités, permettant d'en visiter un plus grand nombre et de réduire le nombre de ceux en instance de pénurie. Ce même principe peut être envisagé dans un autre cadre: supposons qu'une entreprise cherche à optimiser la taille de sa flotte de camions, toujours dans le contexte de livraison de mazout domestique. L'obligation d'emplir le réservoir engendre une solution par "blocs" au sens suivant: ou bien le client n'est pas visité, ou bien il l'est et nous lui livrons la quantité

maximale. Ce type de solution extrémiste tend généralement à une utilisation moins efficace de la capacité du véhicule. Il serait en effet surprenant qu'une somme de tels "blocs" remplisse exactement chaque véhicule ou utilise la totalité de la journée de travail de tout chauffeur. Conséquemment, il est fort possible que même dans une situation où l'on désire visiter un grand nombre de clients, on ne réussisse pas à utiliser la pleine journée de travail. Il resterait par exemple une demi-heure inutilisée parce que tout ajout d'un nouveau bloc (i.e. un client livré au maximum) ou bien demande plus d'une demi-heure de travail, ou bien excède la capacité du camion. On comprend mieux que le fait de ne pas être restreint au niveau de la quantité livrée facilite d'autant une meilleure utilisation de la capacité des véhicules et des journées de travail.

Il est alors possible que l'entreprise réussisse à faire le service avec une flotte réduite et que le coût supplémentaire occasionné par le nombre plus élevé de visites soit largement compensé par les économies réalisées sur le coût d'un(des) camion(s) et d'un(des) chauffeur(s) en moins, les assurances sur ce(s) camion(s), etc...

C'est fondé sur ces trois (3) remarques que nous avons échafaudé deux (2) approches, toutes deux (2) heuristiques:

- la première, simple et rapide s'oriente dans la voie traditionnelle puisque nous emplissons complètement le réservoir de tout client visité, mais en diffère aussi par son mode de sélection des clients à

visiter qui tient compte d'un taux de consommation différent pour chacun d'eux. Cette approche sert en quelque sorte de base de comparaison pour la deuxième approche, en plus de lui fournir une solution réalisable de départ;

- la deuxième approche améliore plusieurs aspects de la première mais s'en distingue principalement en ce qu'elle permet de faire varier la quantité livrée.

I.3 REVUE DE LA LITTÉRATURE

En 1981, quatre auteurs faisaient le point sur l'état de la recherche pour les problèmes de type tournées et horaires [2]. Cet excellent ouvrage, qui contient plus de 500 références, présente une classification complète des problèmes, accompagnée d'une description et d'une analyse des approches de solution. On y aborde les problèmes avec demande stochastique, comme c'est le cas du problème qui nous intéresse. La modeste place faite à ces problèmes [2, pp. 94-98] témoigne de la faible littérature publiée sur le sujet. Nous référons le lecteur intéressé au rapport original.

Le seul article cité qui a vraiment retenu notre attention est celui de Federgruen & Zipkin [7]. Une bonne part de notre deuxième approche s'inspire de cet article et d'un autre l'accompagnant ([8]). Les auteurs y abordent un problème différent du nôtre, mais suffisamment semblable pour que nous puissions en tirer profit. On doit y planifier la

livraison pour un ensemble de clients dont la demande est aléatoire. La contrainte qui nous interdit de livrer plus que le réservoir du client ne peut contenir est absente, mais s'ajoute une contrainte limitant la quantité totale pouvant être livrée dans la journée. Nous pouvons imaginer un tel problème dans le contexte de la livraison d'une denrée rare. On doit ensuite déterminer combien sera livré à chaque client de façon à minimiser les coûts d'inventaire. Il faut retenir que la quantité livrée varie de manière continue. De plus, certains des sous-problèmes de Federgruen - Zipkin apparaissent également dans notre problème. Enfin, nous avons emprunté une bonne partie de l'adaptation qu'ils ont fait de la technique du r-OPT introduite par Lin & Kernighan [12].

L'autre article qui nous a guidé, est la thèse de doctorat toute récente de Dror [6]. Il s'attaque exactement au même problème que nous. Il propose deux (2) approches, et dans chacune d'elles le réservoir doit être complètement rempli. Nous en avons retenu la notion de coûts annuels, qui permet de jeter un regard plus global sur le problème, et la façon de déterminer le"meilleur jour"pour la prochaine livraison.

CHAPITRE II

LES DONNÉES

Il nous a été impossible d'obtenir des données d'une entreprise en opération. Aussi a-t-il fallu les simuler. Cela représente le désavantage d'être un peu coupé de la réalité et de ne pas pouvoir évaluer "concrètement" les mérites et faiblesses des algorithmes développés en les comparant aux performances de l'entreprise. En revanche, la simulation offre beaucoup plus de souplesse, permettant de faire varier les paramètres pour identifier les points forts et les points faibles des approches. Puisque le but poursuivi n'est pas le développement d'un produit fini mais plutôt l'analyse d'approches de solution, la souplesse de la simulation nous apparaît "a fortiori" plus avantageuse.

L'énoncé de la méthodologie de la simulation est plutôt fastidieuse, mais nous préférons l'exposer dès maintenant afin de familiariser davantage le lecteur avec le problème.

II.1 LES CLIENTS

Chaque client i est caractérisé par les paramètres suivants:

μ_i : taux de consommation moyen en litre/degré-jour (ℓ/DJ)

σ_i : écart-type du taux de consommation

r_i : capacité du réservoir en litre (ℓ)

(x_i, y_i) : les coordonnées cartésiennes qui situent le client.

De plus, soient

C_i^j : consommation du client i pour le jour j (en litres)

DJ_j : nombre de DJ enregistrés au cours de la journée j

$T_i^j \triangleq \frac{C_i^j}{DJ_j}$: taux quotidien de consommation du client i le jour j (en ℓ/DJ).

Pour le client i, les T_i^j symbolisent ses habitudes de consommation lorsque le temps varie. Nous supposerons que ces habitudes fluctuent de manière indépendante d'une journée à l'autre et sont distribuées normalement. En d'autres mots, nous supposons que

$$T_i^j : N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

et que les T_i^j sont indépendants par rapport à j.

Une conséquence immédiate de cette hypothèse est que les $C_i^j | DJ_j$ sont indépendants par rapport à j et $C_i^j | DJ_j : N(\mu_i DJ_j, \sigma_i^2 DJ_j^2)$, facilitera considérablement les calculs propabilistes à venir.

Même si nous n'avons pu obtenir de données complètes, nous en avons appris suffisamment pour les simuler.

II.1.1 *Capacité des réservoirs* (r_i)

Les clients n'ont pas tous un réservoir de même capacité. La répartition est en gros la suivante:

% des clients	capacité du réservoir (ℓ)
75%	909
15%	1137
5%	1818
5%	2273

Il a suffi de générer un nombre aléatoire na_i compris entre zéro (0) et un (1), pour chaque client i, et si $na_i \in [0,0.75)$, d'assigner au client i un réservoir d'une capacité de 909ℓ, i.e. $r_i = 909$,

$$\text{si } na_i \in [0.75,0.90) \text{ alors } r_i = 1137$$

$$\text{si } na_i \in [0.90,0.95) \text{ alors } r_i = 1818$$

$$\text{si } na_i \in [0.95,1.00] \text{ alors } r_i = 2273 .$$

II.1.2 Taux de consommation moyen (μ_i)

Il nous a été dit que la consommation annuelle d'un client variait de 1,500ℓ à 10,000ℓ avec une moyenne d'environ 5,000ℓ. Si de plus on estime qu'une année compte 5,250DJ, on obtient un taux de consommation moyen qui varie de 0.28 ℓ/DJ à 2.0 ℓ/DJ avec une moyenne de 0.95 ℓ/DJ. En supposant que la distribution des μ_i parmi les clients est elle-même normale et de moyenne 0.95 ℓ/DJ et sachant qu'en général si

$$Z : N(.95,s^2) \text{ alors } Pr[Z \in (.95-2.0s , .95+2.0s)] = .954 ,$$

nous posons $.95-2s = 0.28$ ℓ/DJ (C'est la borne inférieure obtenue plus haut) et obtenons $s = 0.34$. Il ne reste plus qu'à générer un nombre aléatoire na_i pour tout client i et d'évaluer μ_i à l'aide de

$$F_{N(.95,.34^2)}(\mu_i) = na_i$$

(où $F_{N(.95,.34^2)}$ est la fonction de répartition d'une distribution

$N(.95,.34^2)$) i.e. $\mu_i = F^{-1}_{N(.95,.34^2)}(na_i)$ tel qu'illustré à la figure 2.1

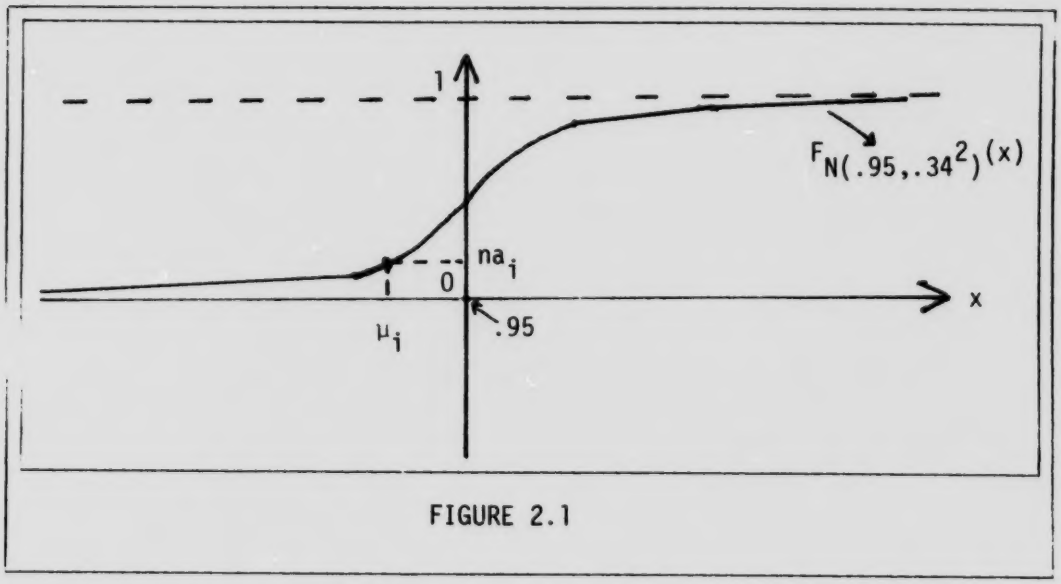


FIGURE 2.1

II.1.3 *Ecart-type du taux de consommation* (σ_i)

Il va de soi que T_i et C_i^j ne peuvent être négatifs. Pour contourner cette difficulté, on peut:

i) utiliser une distribution normale tronquée à zéro, ou

ii) laisser les choses intactes, à la condition que

$$\mu_i - 2.5\sigma_i \geq 0 \equiv \frac{\sigma_i}{\mu_i} \leq \frac{1}{2.5} = 0.40$$

car alors

$$Pr[T_i \leq 0] = Pr[Z \leq \frac{0-\mu_i}{\sigma_i}] \leq Pr[Z \leq -2.5] = .0062$$

et

$$\Pr[C_i^j \leq 0] = \Pr[Z \leq \frac{0-\mu_i DJ_j}{\sigma_i DJ_j}] = \Pr[Z \leq -\frac{\mu_i}{\sigma_i}] \leq .0062$$

avec Z $N(0,1)$.

Ne possédant nous-mêmes aucune données nous permettant de vérifier la pertinence du choix, nous avons opté pour l'alternative ii), pour la simplicité qui en découle, tant au niveau des calculs que du développement théorique. Il ne faut pas se cacher que nous limitons ainsi l'incertitude sur la consommation. A titre d'indication, Dror [6] doit faire l'hypothèse que $\frac{\sigma}{\mu} < 1$ dans certaines preuves de convexité, et il mentionne que ses données, obtenues de l'industrie, vérifient cette hypothèse.

De plus, pour simplifier davantage, nous avons supposé σ_i constant pour tout client i et l'avons fixé à 0.20 de sorte que seuls les clients dont $\mu_i - 2.5 \times 0.20 \geq 0 \equiv \mu_i \geq 0.5$ ont été retenus.

Ces hypothèses influenceront les résultats mais les algorithmes élaborés n'en dépendent aucunement en ce sens qu'ils restent applicables pour σ_i fixé à une autre valeur et même pour σ_i variable avec i .

II.2 LA FLOTTE DE CAMIONS

II.2.1 La capacité des camions (q_i)

Dans l'entreprise consultée, 80% des camions ont une capacité de 9988ℓ. Pour simplifier, nous les avons tous considérés de capacité égale à 9988ℓ.

II.2.2 *Nombre de camions (NC)*

Nous avons appris qu'un camion livre environ 5.0 millions de litres par an. Si on suppose un taux de consommation moyen de 0.95 ℓ/DJ cela signifie

$$\frac{5 \times 10^6\ \ell}{.95\ \ell/DJ \times 5250\ DJ} = 1003 \text{ clients par an en moyenne .}$$

Nous verrons ci-après que nous avons conservé 2976 clients ce qui veut dire que trois(3) camions devraient suffire. L'on ignore toutefois combien d'heures par semaine sont travaillées pour fournir ce travail. Suite à des tests préléminaires nous avons fixé NC à quatre(4), puis à trois(3).

II.2.3 *Nombre d'heures travaillées (H)*

Nous avons supposé que tout chauffeur travaillait 8 heures par jour et, pour simplifier, sept(7) jours par semaine.

II.2.4 *Temps de livraison*

Le débit de mazout à la livraison est de 60 gallons/minute ou .00006173 heure/litre ($\triangleq$ CAVARI). Nous avons supposé que le débit d'emplissage d'un camion au dépot était quatre(4) fois supérieur soit .00001543 heure/litre ($\triangleq$ CAVARO) . (Soulignons que le temps nécessaire au(x) remplissage(s) doit être comptabilisé dans la journée de 8 heures de chaque chauffeur). En plus de ces temps fonction de la quantité livrée, s'ajoutent des temps fixes qui tiennent compte des facteurs suivants:

- le déroulement et l'enroulement du boyau chez le client et la facture à préparer et à remettre au client; (CAFIXE)

- l'attente au dépôt avant le remplissage et la mise en place du dispositif de remplissage (CAFIXO).

Dans les deux cas, ce temps a été fixé à 10 minutes soit environ 0.16 heure (= CAFIXE = CAFIXO) .

II.3 LE RÉSEAU

Nous avons opté pour un réseau urbain constitué d'une partie de l'île de Montréal qui correspond en gros aux villes de St-Laurent, Montréal-Nord, Rivière-des-Prairies, Anjou, St-Léonard, Montréal-Est et Pointe-aux-Trembles (maintenant annexée à Montréal).

Nous avons extrait ce réseau d'un réseau agrégé de l'île de Montréal fourni par Statistiques Canada et constitué de 20,000 noeuds et autant d'arcs. Nous avons conservé 3284 noeuds et 4902 arcs. Chaque noeud correspondait, au départ, à un client mais par la suite certains clients furent éliminés pour leur taux de consommation trop faible ($\mu_i \leq 0.50$).

Ce réseau représentant une région plutôt homogène, nous avons établi une vitesse de circulation uniforme de 33 km/hre (incluant les arrêts) (VITMOY = 33) .

Nous nous sommes assurés que le réseau était connexe.

II.4 CONDITIONS INITIALES

Les données seraient incomplètes sans les conditions au début de la période considérée. Ces conditions sont:

- le niveau réel du réservoir de chaque client au début de la période ($litr_i$). Le paramètre $litr_i$ est en général, par la suite, le niveau réel à la fin de la journée de planification considérée;

- le niveau du réservoir suite à la dernière livraison (β_i) (i.e. que le client n'a pas été visité entre cette livraison et le début de la période);

- le nombre de jours complets depuis la dernière livraison (nj_i)

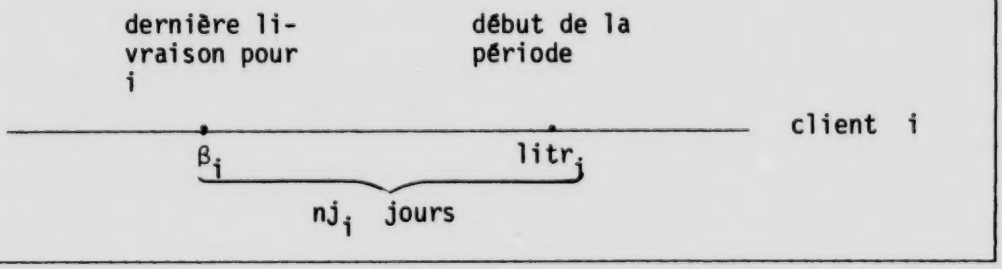


FIGURE 2.2

Pour ce faire nous avons d'abord supposé que le niveau du réservoir lors de la dernière visite était précisément la capacité du réservoir, pour tous les clients. En d'autres termes, tous ont vu leur réservoir empli lors de cette visite (i.e. $\beta_i = r_i$) . Puis, nous avons supposé que le niveau du réservoir au début de la période était distribué

uniformément parmi les clients entre 20% et 100% de sa capacité. Il suffit alors de générer un nombre aléatoire nb_i compris entre 0 et 1 et le niveau du réservoir du client i au début de la période est de

$$litr_i = [0.20 + 0.80 \times nb_i] \times r_i$$

(on se souviendra que r_i = capacité du réservoir du client i).

Finalement, à partir de l'historique des DJ pour les mois précédents, nous avons simulé, pour chaque client sa consommation quotidienne depuis la dernière livraison et jusqu'au début de la période d'étude. Pour un jour j, s'il y eut DJ_j degré-jour, le client i eut une consommation C_i^j telle que

$$C_i^j : N(\mu_i DJ_j , \sigma^2 DJ_j^2) .$$

En générant un nombre aléatoire na_i^j compris entre 0 et 1 on a:

$$\forall\ p \in [0,1] , \exists!\ \epsilon_p \ni Pr[C_i^j \leq \epsilon_p] = p$$

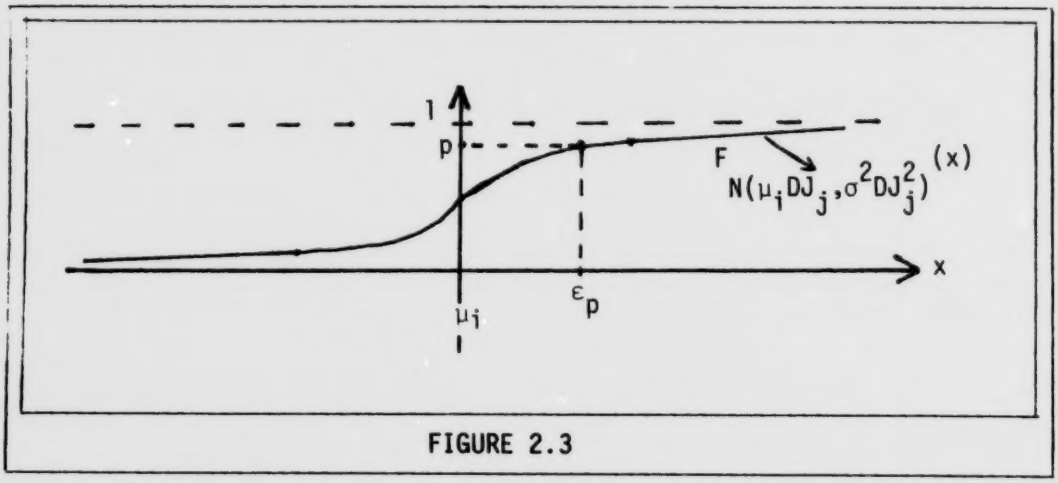


FIGURE 2.3

il y a bijection entre p et ϵ_p et en particulier entre na_i^j et $\epsilon_{na_i^j}$. A na_i^j est donc associé la consommation $\epsilon_{na_i^j}$, où

$$\epsilon_{na_i^j} = F^{-1}_{N(\mu_i DJ_j, \sigma^2 DJ_j^2)}(na_i^j)$$

$$= \sigma F^{-1}_{N(0,1)}(na_i^j) + \mu_i \ .$$

Nous remontons ainsi dans le temps jusqu'au jour $-J_i$ (i.e. le J_i ième jour précédant le début de la période) où pour la première fois

$$litr_i + \sum_{j=-J_i}^{-1} \epsilon_{na_i^j} \geq \beta_i = r_i$$

et le jour $-J_i$ devient la date de la dernière livraison et $nj_i = J_i - 1$.

II.5 PÉRIODE DE SIMULATION

La simulation s'étend du 8 décembre 1982 au 21 janvier 1983. Ces 45 jours constituent la période la plus froide de l'historique à notre disposition avec une moyenne quotidienne de 27.4 DJ et une pointe de 42 DJ. Tout comme à la section 2.4, nous avons simulé la consommation réelle pour les jours j de la période de simulation.

Ceci constitue les données nécessaires pour tester les deux (2) approches développées. Pour une journée type, les opérations suivantes sont complétées:

i) application d'un de nos algorithmes qui détermine les clients visités ainsi que la quantité qui leur est livrée

ii) mise à jour du fichier des clients;

iii) déterminer s'il y a pénurie chez un client à la fin de la journée, et dans l'affirmative le compiler et en tenir compte pour la mise à jour puisqu'une livraison spéciale qui remplit son réservoir est effectuée.

CHAPITRE III

LA PREMIÈRE APPROCHE

III.1 INTRODUCTION

Dans cette première approche, nous avons voulu ne pas trop nous éloigner des sentiers battus. C'est ainsi que nous avons imposé que le réservoir de tout client visité soit complètement rempli. Cette caractéristique se retrouve, à notre connaissance, unanimement dans les solutions implantées dans l'industrie ainsi que dans la (mince) littérature publiée sur le sujet. Par rapport à la solution présentée au chapitre II, nous avons laissé tomber le concept d'un seuil critique uniforme pour tous les clients. Nous avons plutôt introduit un critère de sélection basé sur la probabilité de pénurie prochaine.

Notre but premier dans la conception de cette approche était la simplicité. Nous désirions nous familiariser avec le problème et obtenir le plus tôt possible un algorithme fournissant une solution réalisable. C'est pourquoi l'on ne doit pas voir dans cet algorithme le nec plus ultra de sa classe. La comparaison de nos deux approches ne doit en aucun cas être considérée comme une guerre dont l'issue est définitive. Nos résultats sont de toute façon trop sommaires pour porter un tel jugement.

III.2 L'ALGORITHME

Situons-nous le jour J-1 au soir alors que toutes les informations sur les activités du jour J-1 nous sont connues et que nous sommes à planifier celles du jour J . L'algorithme, dans ses grandes lignes, est le suivant:

Etape 1: le choix des clients

- choix de l'ensemble E des clients parmi lesquels nous construirons les routes du jour J . Seuls ces clients peuvent être visités le jour J , mais ils ne le seront pas nécessairement,
- déterminer la table des distances entre chaque paire de clients de E ,
- calcul de $livr_i$: l'estimé de la quantité remplissant complètement le réservoir du client i .

Etape 2: solution initiale

- construction par insertions parallèles d'un premier ensemble de boucles réalisables.

Etape 3: amélioration de la solution initiale

- tant que l'on peut améliorer la fonction économique, répéter les trois (3) tâches suivantes:

i) 2-OPT: tenter d'améliorer les distances parcourues par une technique de postoptimisation du type 2-OPT qui procède à des échanges d'arcs, et donc de clients, intra et inter boucles;

ii) AJOUT: tenter d'ajouter, un à un, des clients à la solution courante;

iii) ECHANGE: tenter d'éliminer un client du tour courant pour le remplacer par un client hors de ce tour.

Etape 4: mise-à-jour des fichiers et compilation des résultats de la journée. Il faut en particulier tenir compte des pénuries survenues, s'il y a lieu.

III.3 L'OBJECTIF À MINIMISER

Notre objectif à chaque jour de livraison est d'identifier les clients jugés urgents à servir puis d'établir des circuits de livraison permettant de les visiter à un moindre coût. Au cours de l'algorithme, nous avons, par exemple, à juger de la pertinence d'inclure un client qui ne l'était pas (c'est l'étape 3 ii) décrite à la section précédente). Un tel ajout diminue le risque de pénurie de ce client puisqu'il est maintenant visité et son réservoir complètement rempli. En contrepartie, un coût est associé au déplacement nécessaire pour se rendre chez ce client. En tentant compte de ces deux(2) aspects, il faut pouvoir déterminer si un tel ajout mérite d'être réalisé. Nous avons également à décider lequel de plusieurs clients est-il préférable d'ajouter à une route. Pour répondre à ces questions il faut pouvoir comparer la notion de risque avec celle de coût de transport. Le trait d'union entre les deux(2) sera le coût occasionné par chacun. Pour ce calcul, nous avons formulé les hypothèses suivantes:

i) d'abord les résultats issus de la simulation décrite au chapitre II:

- nombre total de clients: 2976
- moyenne du taux de consommation moyen de chaque client: 0.95 ℓ/DJ
- nombre de DJ dans une année: 5250 DJ ,

ii) puis les hypothèses supplémentaires suivantes:

- consommation en combustible de chaque véhicule de livraison: 5 milles/gallon ≅ 0.5625 ℓ/km
- coût du litre de combustible des véhicules de livraison: 0.50$ /ℓ
- coût d'entretien annuel de chaque véhicule: 1 500$
- prix de vente du mazout au client: 0.35$ /ℓ
- probabilité de perdre le client au profit d'un compétiteur lorsqu'il y a pénurie: 0.1
- taux d'intérêt annuel pour les dix(10) prochaines années: 8%
- déplacement moyen nécessaire par litre livré (basé sur une simulation): 0.0027 km/ℓ

Les coûts de transport peuvent maintenant être exprimés en $/km.

$$0.5625\ \ell/km \times 0.50\$\ /\ell \cong 0.29\$\ /km\ .$$

Le nombre de litres livrés annuellement est de:

$$2976 \text{ clients} \times 0.95\ \ell/DJ \times 5250\ DJ = 14{,}842{,}800\ \ell$$

ce qui nécessite un déplacement de

$$0.0027 \text{ km}/\ell \times 14{,}842{,}800\ \ell \cong 40{,}000 \text{ km} .$$

Si, pour fixer les idées, la flotte compte (3) véhicules, le coût annuel d'entretien est de $3 \times 1500\$ = 4500\$$ ou $4500\$/40000\text{km} \cong 0.11\$/\text{km}$. Au total, le coût de transport est donc de $0.29+0.11 = 0.40\$/\text{km}$. Il est à noter que nous avons volontairement omis d'inclure dans ce facteur l'amortissement du véhicule et les assurances puisqu'ils nous apparaissaient trop peu liés au kilométrage parcouru.

Quant au coût de pénurie, un client ayant un taux de consommation moyen de $\mu\ \ell/DJ$ consomme annuellement 5250μ litres, et rapporte donc au distributeur $5250\mu\ \ell \times 0.35\$/\ell = 1837.5\mu\ \$$. A un taux d'intérêt annuel de 8% la valeur présente de ces revenus sur dix(10) ans (si l'on suppose le revenu perçu en un seul versement au début de l'année) est de:

$$1837.5\mu \times \sum_{j=0}^{9} \left(\frac{1}{1.08}\right)^{j} = 13{,}316\mu\ \$.$$

La probabilité de perdre un client en pénurie étant 0.1 et celle de pénurie le jour J étant p alors l'espérance du coût de pénurie pour ce client est

$$13{,}316\mu \times 0.1 \times p = 1331.6\mu p\ \$ \qquad (3.1)$$

où p = Pr[pénurie du client à la fin du jour J | le client n'est pas en pénurie à la fin du jour J-1] .

En pratique nous n'avons pas utilisé p , mais plutôt

p'= Pr[pénurie du client à la fin du jour J+2]

puisque p' doit de toute façon être calculé pour décider si le client fait ou non partie de l'ensemble E . En plus p' étant supérieure à p nous amplifions l'effet d'une pénurie et l'algorithme cherchera à s'en protéger davantage.

L'objectif à minimiser comporte donc deux termes

i) le coût de pénurie $1331.6 \sum_{i=1}^{2976} \mu_i p'_i(x_i)$ où $x_i \in \{0,1\}$ et

$$p'_i(x_i) = \begin{cases} \text{probabilité de pénurie depuis la dernière livraison et jusqu'à la fin du jour J+2 lorsque le client i n'est pas visité d'ici là, (i.e. si } x_i = 0) ; \\ \text{probabilité de pénurie depuis la dernière livraison et jusqu'à la fin du jour J+2 lorsque le client i est visité le jour J et qu'alors son réservoir est complètement rempli, (i.e. } x_i = 1) . \end{cases}$$

ii) et le coût de transport pour le jour J , i.e. les distances parcourues par les véhicules au coût de 0.40$ /km .

III.4 FORMULATION DÉTAILLÉE, JUSTIFICATION ET IMPLANTATION INFORMATIQUE DE L'ALGORITHME

Dans cette section, nous reprenons chacune des quatre(4) étapes de l'algorithme en les détaillant au niveau théorique tout en les justifiant. Nous terminons par un résumé de l'algorithme en pseudo-langage.

III.4.1 l'étape 1

- Pour évaluer l'urgence à servir un client, nous calculons sa probabilité de pénurie d'ici trois(3) jours, i.e. d'ici la fin du jour J+2 . Sur la base de ce calcul, nous choisissons ensuite tous ceux dont le risque dépasse un certain seuil S fixé à priori.

La probabilité de pénurie servant à définir E est la suivante:

$$\Pr[\text{pénurie du client } i \text{ entre la dernière livraison et la fin du jour } J+2 \mid \text{le client } i \text{ n'est pas en pénurie à la fin du jour } J-1] . \quad (3.2)$$

$$= \frac{\Pr[\text{pénurie du client } i \text{ entre la dernière livraison et la fin du jour } J+2 \text{ mais non à la fin du jour } J-1]}{\Pr[\text{le client } i \text{ n'est pas en pénurie à la fin du jour } J-1]} . \quad (3.3)$$

Rappelons qu'au chapitre précédent, nous avons fait les deux hypothèses suivantes:

i) la consommation $C_i^j|DJ_j$ du client i le jour j est distribuée normalement selon une $N(\mu_i DJ_j , \sigma^2 DJ_j^2)$

ii) les $C_i^j|DJ_j$ sont indépendants par rapport au jour j .

Nous en ajoutons maintenant une troisième:

iii) nous connaissons la valeur exacte des DJ de tous les jours à venir, en particulier ceux des jours J,J+1 et J+2 . Les probabilités impliquant des C_i^j seront donc toutes en fait conditionnelles à la connaissance des DJ_j et nous pourront utiliser l'hypothèse ii) ci-dessus pour simplifier grandement les calculs. Pour alléger la notation toutefois, nous n'indiquerons pas qu'une probabilité ou une distribution est conditionnelle. Par exemple, $\Pr[0.5C_i^o + \sum_{j=1}^{nj_i} C_i^j + \beta_i]$ doit être interprété comme $\Pr[0.5C_i^o \sum_{j=1}^{nj_i} C_i^j + \beta_i \; DJ_j, j=0,\ldots,nj_i]$

Cette dernière hypothèse vaut également pour tous les développements faits dans la seconde approche. Nous avons fait cette hypothèse très forte surtout pour simplifier nos propos. Elle ne tient évidemment pas dans la réalité où il faudra recourir aux prévisions météorologiques pour le futur immédiat (i.e. deux(2) ou trois(3) jours) et à des moyennes pour un futur plus lointain, avec l'incertitude qui en découle. Des modèles plus sophistiqués pourraient également être utilisés (les séries chronologiques par exemple). Il importe de retenir que la suppression de cette troisième hypothèse ne compromet en rien les approches que nous proposons mais n'entraîne que des modifications (et complications) de certains calculs.

Nous supposons enfin que toutes les livraisons d'un même jour ont lieu simultanément à 12:00 hres. Au moment de la planification des activités du jour J, la figure 3.1 représente la situation pour un client i ayant été visité il y a nj_i jours (ce qui signifie, en fait, il y a nj_i jours et demie).

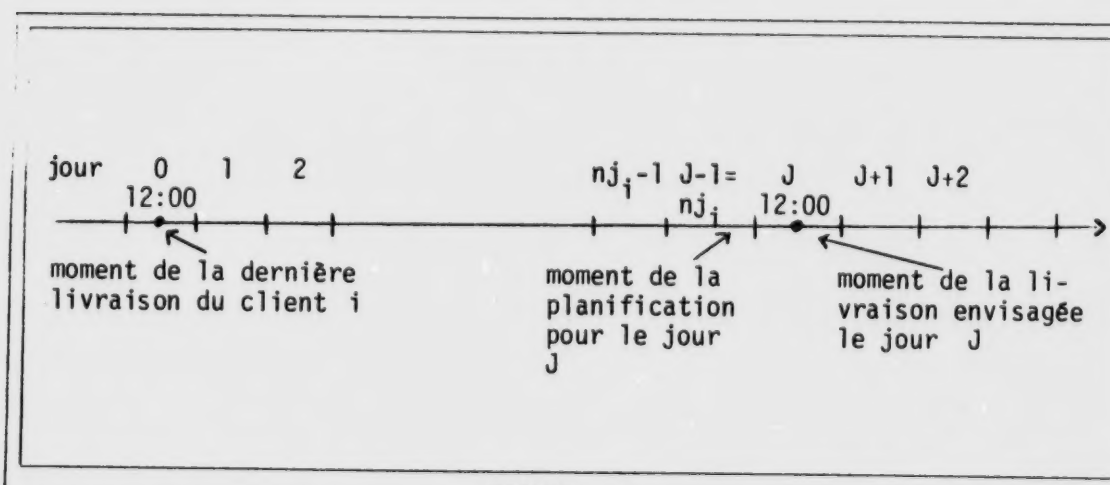


FIGURE 3.1

Sous ces hypothèses,

Pr[pénurie du client i entre la dernière livraison et la fin du jour $J+2$ mais non à la fin du jour $J-1$]

$$= \int_{-\infty}^{\beta_i} \int_{-\infty}^{\beta_i - x_0} \cdots \int_{-\infty}^{\beta_i - \sum_{j=0}^{nj_i-1} x_j} \int_{\beta_i - \sum_{j=0}^{nj_i} x_j}^{\infty} f_i^0(x_0) f_i^1(x_1) \cdots f_i^{nj_i}(x_{nj_i}) f_i^J(x_J) dx_0 \cdots dx_J$$

$$+ \int_{-\infty}^{\beta_i} \cdots \int_{-\infty}^{\beta_i - \sum_{j=0}^{nj_i} x_j} \int_{\beta_i - \sum_{j=0}^{nj_i} x_j - x_J}^{\infty} f_i^0(x_0) \cdots f_i^{J+1}(x_{J+1}) dx_0 \cdots dx_{J+1}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\beta_i} \cdots \int_{-\infty}^{\beta_i - \sum_{j=0}^{nj_i} x_j - x_J} \int_{\beta_i - \sum_{j=0}^{nj_i} x_j - x_J - x_{J+1}}^{\infty} f_i^0(x_0) \cdots f_i^{J+2}(x_{J+2}) dx_1 \cdots dx_{J+2}$$

où

f_i^j est la fonction de densité de C_i^j , $1 \le i \le J+2$,

f_i^0 est la fonction de densité de la consommation de la demie-journée suivant le moment de la livraison qui a lieu à 12:00 hres le jour zéro,

nj_i le nombre de jours depuis la dernière livraison au client i ,

β_i est le niveau du réservoir du client i à l'instant suivant la dernière livraison il y a nj_i jours

$$= \Pr[0.5C_i^o + \sum_{j=1}^{nj_i} C_i^j \leq \beta_i] - \Pr[0.5C_i^o + \sum_{j=1}^{nj_i} C_i^j + C_i^J \leq \beta_i] + \Pr[0.5C_i^o + \sum_{j=1}^{nj_i} C_i^j + C_i^J \leq \beta_i]$$

$$- \Pr[0.5C_i^o + \sum_{j=1}^{nj_i} C_i^j + C_i^J + C_i^{J+1} \leq \beta_i] + \Pr[0.5C_i^o + \sum_{j=1}^{nj_i} C_i^j + C_i^J + C_i^{J+1} \leq \beta_i]$$

$$- \Pr[0.5C_i^o + \sum_{j=1}^{nj_i} C_i^j + C_i^J + C_i^{J+1} + C_i^{J+2} \leq \beta_i]$$

(si l'on suppose que la consommation et les DJ du jour de la livraison zéro sont les mêmes de 00:01 hre à 12:00 hres que de 12:01 hres à 24:00 hres de sorte que l'on puisse utiliser $0.5C_i^o$ pour la consommation de la demie-journée suivant la livraison)

$$= \Pr[0.5C_i^o + \sum_{j=1}^{nj_i} C_i^j \leq \beta_i] - \Pr[0.5C_i^o + \sum_{j=1}^{nj_i} C_i^j + C_i^J + C_i^{J+1} + C_i^{J+2} \leq \beta_i]$$

de même, $\Pr[$le client i n'est pas en pénurie à la fin du jour $J-1]$

$= \Pr[0.5C_i^o + \sum_{j=i}^{nj_i} C_i^j \leq \beta_i]$ de sorte que (3.3) est

$$1 - \frac{\Pr[0.5C_i^o + \sum_{j=1}^{nj_i} C_i^j + C_i^J + C_i^{J+1} + C_i^{J+2} \leq \beta_i]}{\Pr[0.5C_i^o + \sum_{j=1}^{nj_i} C_i^j \leq \beta_i]} . \qquad (3.4)$$

Bien que (3.4) soit simple à calculer (les $C_i^j | DJ_j$ sont indépendants et distribués normalement de sorte que, par exemple

$$0.5C_i^o + \sum_{j=1}^{nj_i} C_i^j : N(\mu_i[0.5DJ_o + \sum_{j=1}^{nj_i} DJ_j] \ , \ \sigma^2[(0.5DJ_o)^2 + \sum_{j=1}^{nj_i} DJ_j^2])$$

nous avons préféré utiliser la probabilité

$$\Pr[\text{pénurie du client } i \text{ d'ici la fin du jour } J+2]$$

$$= \Pr[0.5C_i^o + \sum_{j=1}^{nj_i} C_i^j + C_i^J + C_i^{J+1} + C_i^{J+2} \geq \beta_i] \; . \qquad (3.5)$$

Il est vrai que cette formule élimine l'information que le client i n'est pas en pénurie à la fin du jour $J-1$, mais elle est plus simple à manipuler pour établir le seuil S spécifiant l'ensemble E. Curieusement, c'est la seconde approche qui nous fournit un moyen "rationnel" d'établir ce seuil. Comme nous le verrons au chapitre IV, dans cette deuxième approche nous déterminons pour chaque client i un seuil critique SC_i exprimé en litres. De par la définition de SC_i nous désirons idéalement visiter le client i le jour J_i' où le niveau de son réservoir atteint SC_i. SC_i varie selon les clients et leur taux de consommation moyen différent. Mais si nous nous situons au moment de la dernière livraison (i.e. au jour zéro à 12:00 hres) et que nous y évaluons la probabilité de pénurie d'ici la fin du jour J_i' i.e. $\Pr[0.5C_i^o + \sum_{j=1}^{J_i'} C_i^j \geq \beta_i]$, nous constatons que cette probabilité varie peu d'un client à l'autre et a une valeur d'environ 0.0008. Nous avons donc fixé S à 0.0008. L'ensemble E devient

$$E = \{\text{client } i \mid \Pr[0.5C_i^o + \sum_{j=1}^{nj_i} C_i^j + C_i^J + C_i^{J+1} + C_i^{J+2} \geq \beta_i] \geq 0.0008\} \qquad (3.6)$$

et contient en quelque sorte tous les clients dont le "meilleur jour" de livraison J_i' survient au cours des trois(3) prochains jours.

Même si les clients pouvant être en pénurie à la fin du jour J représentent un plus grand risque et qu'on pourrait ne s'occuper des autres que plus tard, nous préférons étendre notre horizon à trois(3) jours (i.e.

jusqu'à J+2 (voir (3.2) et (3.5)). En portant un regard moins myope sur la situation, nous augmentons le bassin de clients pour construire les routes du lendemain. Cela permet de tirer profit de gains qui n'auraient pas été disponibles avec un horizon plus restreint. En effet, supposons par exemple, qu'un chauffeur passe tout près d'un client i_o qui ne devrait être servi que deux jours plus tard. Avec un horizon de trois(3) jours, i_o est dans E et le chauffeur peut profiter de ce que i_o est sur son chemin pour le visiter en J . Ainsi un client n'étant pas en instance de pénurie au jour J peut être servi en ce jour alors que s'il l'était en J+2 il occasionnerait un important détour de la part du chauffeur.

Un autre facteur motivant un horizon plus étendu est la variation du taux de consommation moyen μ_i . Un client avec un taux élevé a une probabilité de pénurie qui est essentiellement nulle jusqu'à un jour très voisin et parfois égal à celui où en moyenne la pénurie survient et ce n'est qu'à ce moment que la probabilité de pénurie augmente brusquement et devient significative. Pour se donner une certaine marge de manoeuvre vis-à-vis de ces clients, il faut allonger l'horizon. Sinon, lorsque ces clients apparaitraient dans le bassin E , il faudrait les servir immédiatement. Si leur nombre devenait trop important à un jour donné, on risquerait de ne pouvoir tous les visiter et de faire face à des situations de pénuries.

Il va sans dire que le seuil S pour sélectionner les clients de E , est d'une importance capitale. Plusieurs tests doivent être effectués pour optimiser ce seuil, et nous n'en sommes pas rendu à ce point. Il est même possible qu'il soit souhaitable de faire varier ce seuil selon les circonstances, par exemple selon le nombre de clients en instance de pénurie

au cours de la prochaine semaine.

- La table des distances est obtenue par le calcul du plus court chemin entre un point et les autres. Les distances sont toutes positives et nous avons appliqué l'algorithme de Dijkstra sur l'ensemble du réseau. Nous ne reprendrons pas ici cet algorithme bien connu. Le lecteur intéressé pourra consulter [12].

Notons que cette table des distances est particulièrement embarassante en raison de l'espace mémoire considérable qu'elle occupe et du temps de calcul nécessaire à sa confection. Bien que perdant en précision (et donc en réalisme) nous réaliserions de grandes économies en utilisant une méthode plus simple, de type Manhattan par exemple.

- Enfin, $livr_i$, l'estimé de la quantité de litres remplissant complètement le réservoir du client i s'il y a livraison le jour J (à 12:00 hres) est donné par

$$livr_i = \mu_i[0.5DJ_o + \sum_{j=1}^{nj_i} DJ_j + 0.5DJ_J] .$$

III.4.2 *L'étape 2*

Nous avons eu recours à une technique d'insertion. Ces techniques, fréquemment utilisées pour résoudre les problèmes de voyageurs de commerce, sont fort nombreuses. Que ce soit l'insertion la plus éloignée, la plus rapprochée, la "meilleure" ou celle choisie au hasard (et il y en a d'autres) ces algorithmes donnent des résultats comparables aux meilleurs techniques (voir [10] à ce sujet). Notre problème comportant plusieurs véhicules et des

contraintes de capacité et de temps restreignant les insertions, nous avons dû faire quelques ajustements. Nous avons retenu un algorithme d'insertions parallèles, i.e. qui construit les boucles non pas les unes après les autres mais toutes à la fois.

L'algorithme procède comme suit:

1- Estimer le nombre de camions NC requis pour desservir le nombre de clients présents (en général un véhicule peut desservir un maximum de vingt-cinq(25) clients).

2- Associer à chaque client i le temps t_i nécessaire à le visiter.

$t_i = 2t(\text{dépot},i)+livr_i \times (CAVARI+CAVARO)+CAFIXE+CAFIXO$ où $t(\text{dépot},i)$ est le temps nécessaire au trajet direct du dépot au client i.

Former un heap de ces valeurs dont la racine est le maximum des valeurs. Nous ne faisons pas intervenir le coût de pénurie dans ces valeurs car nous voulons avant tout initialiser les routes avec les clients les plus éloignés et avoir de "beaux" trajets.

3- Retirer un élément du heap et former la première boucle avec ce client.

4- Reformer le heap et retirer l'élément maintenant au sommet.
Si le client s'insère dans une boucle existante (i.e. ne viole aucune contrainte) alors exécuter la "meilleure insertion possible" pour ce client.
Sinon si on peut initialiser une nouvelle boucle avec ce client alors le faire,

sinon, si le heap n'est pas vide, reprendre 4.

Il reste à préciser ce qu'on entend par "la meilleure insertion possible" pour un client. Voici le détail du calcul pour le client L_o :

Pour toute boucle b existante faire

C est le camion parcourant b

Si $CAPCUM(b)+livr_{L_o} > CAPA$ alors L_o ne peut être inséré dans b et on passe à une autre boucle. CAPCUM(b) est la somme des quantités livrées sur la boucle b .

Sinon nous tentons d'insérer L_o en occasionnant la plus petite dépense de temps possible.

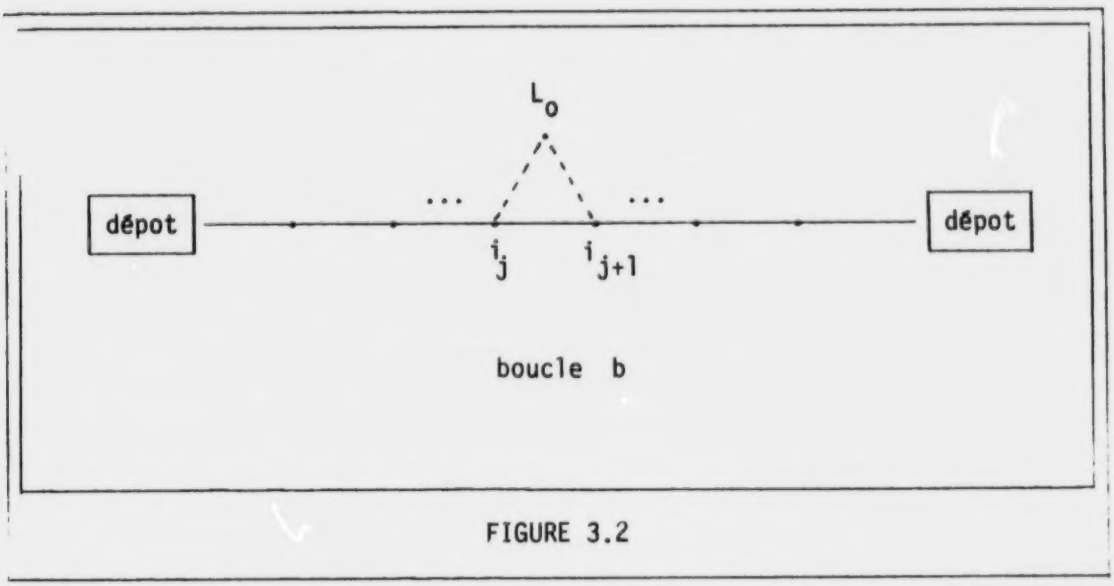


FIGURE 3.2

L'insertion de L_o entre les clients i_j et i_{j+1} demande un temps de DELTAT, où

$$DELTAT = t(i_j,L_o)+t(L_o,i_{j+1})-t(i_j,i_{j+1})+CAFIXE$$

$$+livr_{L_o}\times(CAVARI+CAVARO) .$$

Nous conservons l'insertion dont le DELTAT est minimal. Notons ce DELTAT par $DELTAT_b$.

Si $TEMCUM(0,C)+DELTAT_b \leq H$ alors le client s'insère dans b , où $TEMCUM(0,C)$ est le temps total de parcours des boucles du chauffeur C. Si L_c peut s'insérer dans plus d'une boucle b , alors nous l'insérons dans celle dont $DELTAT_b$ est minimal, ce qui constitue "la meilleure insertion" pour le client L_o .

III.4.3 *Le 2-OPT*

L'algorithme d'initialisation de parcours n'a pas la prétention de fournir une solution optimale, surtout lorsque le nombre de clients est élevé (200 par exemple). Couplé à un algorithme de postoptimisation cependant, les résultats sont excellents [5]. Tant pour son efficacité que pour sa simplicité, nous avons opté pour la technique du 2-OPT introduite par Croes [6] et formalisée par Lin [7]. La version de Croes ne touchait que le problème du voyageur de commerce. Notre problème étant plus complexe, il a fallu adapter l'algorithme, voyons de quelle façon.

Il faut au départ une solution réalisable, comme celle fournie par l'étape 2. Cette solution est constituée de plusieurs boucles. Pour obtenir, comme chez Croes, l'équivalent d'une seule boucle, appelée un tour, nous utilisons une transformation désormais classique (voir [10] par exemple). Le dépot, qui est le point de départ et d'arrivée de toutes les boucles, est multiplié autant de fois qu'il y a de boucles, de sorte que les boucles mises bout à bout et séparées par un dépot forment un tour, tel que l'illustre la figure 3.3.

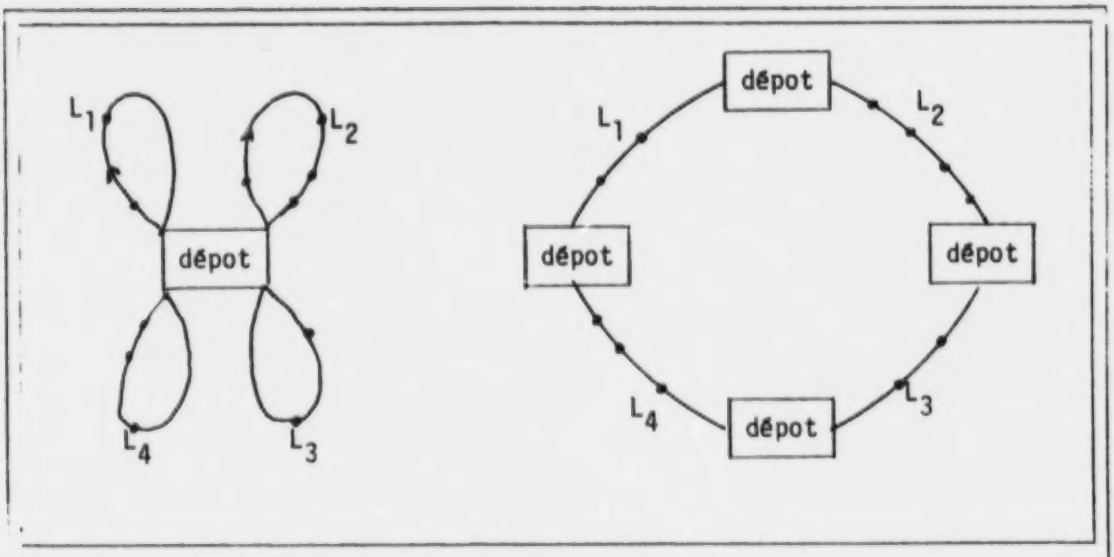


FIGURE 3.3

Nous procédons ensuite aux échanges d'arcs deux à deux.

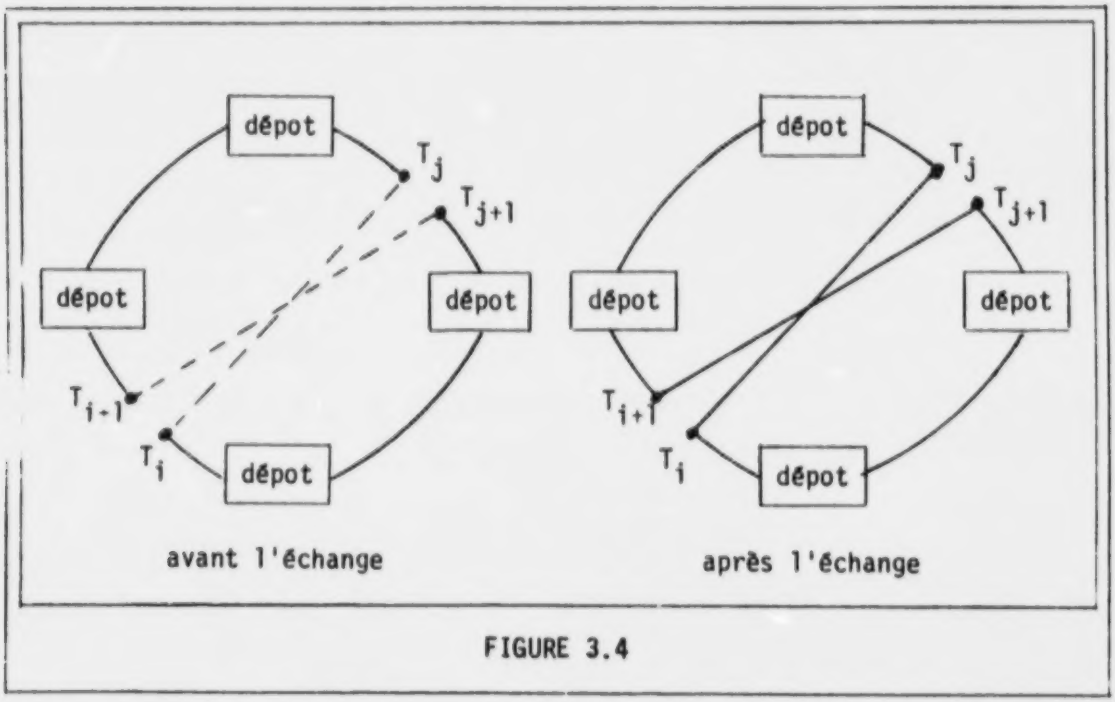


FIGURE 3.4

Dès qu'un tel échange réduit la distance parcourue tout en satisfaisant les contraintes de capacité et de temps, le tour est modifié et l'examen reprend sur le nouveau tour. Seuls les échanges préservant la connexité du tour sont considérés. L'échange de la figure 3.5, par exemple, est interdit puisqu'il fractionne le tour en deux

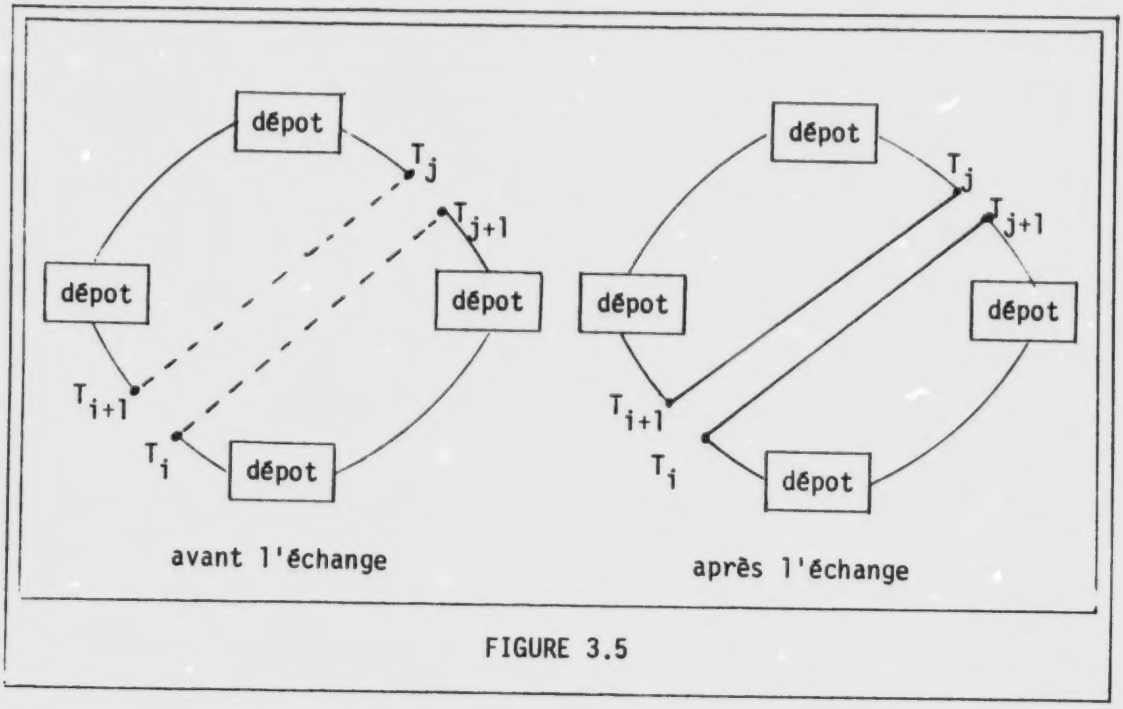


FIGURE 3.5

L'algorithme cesse dès qu'aucun échange ne peut réduire les distances parcourues tout en respectant les contraintes. La méthode ne garantit pas que l'optimalité globale soit alors atteinte. Le tour peut n'être qu'optimal localement. Voici l'algorithme 2-OPT:

1- Représenter le tour initial par un vecteur $T : T_1, T_2, \ldots, T_n, T_{n+1} = T_1$ où T_i est le $i^{ième}$ sommet du tour (T_i est soit un client, soit le dépot).

2- Pour $i = 1,2,\ldots,n-2$ faire.

3- Pour $j = i+2,\ldots,n$ faire

$DELTAD = dis(T_i,T_j)+dis(T_{i+1},T_{j+1})-dis(T_i,T_{i+1})-dis(T_j,T_{j+1})$

$DELTAT = DELTAD/VITMOY$.

Si $DELTAD \geq 0$ itérer sur j et reprendre 3-. Identifier la boucle b_1 et le chauffeur c_1 desservant T_i et T_{i+1}, et la boucle b_2 et le chauffeur c_2 desservant T_j et T_{j+1}.

Si $b_1 = b_2$, c'est que l'échange a lieu entre quatre points d'une même boucle, assurant que les contraintes restent satisfaites.

$TEMCUM(b_1) \leftarrow TEMCUM(b_1)+DELTAT$

$TEMCUM(0,c_1) \leftarrow TEMCUM(0,c_1)+DELTAT$.

Procéder à l'échange, comme à la figure 3.4, et reprendre l'étape 2 depuis le début.

Sinon, les deux nouvelles boucles sont A et B

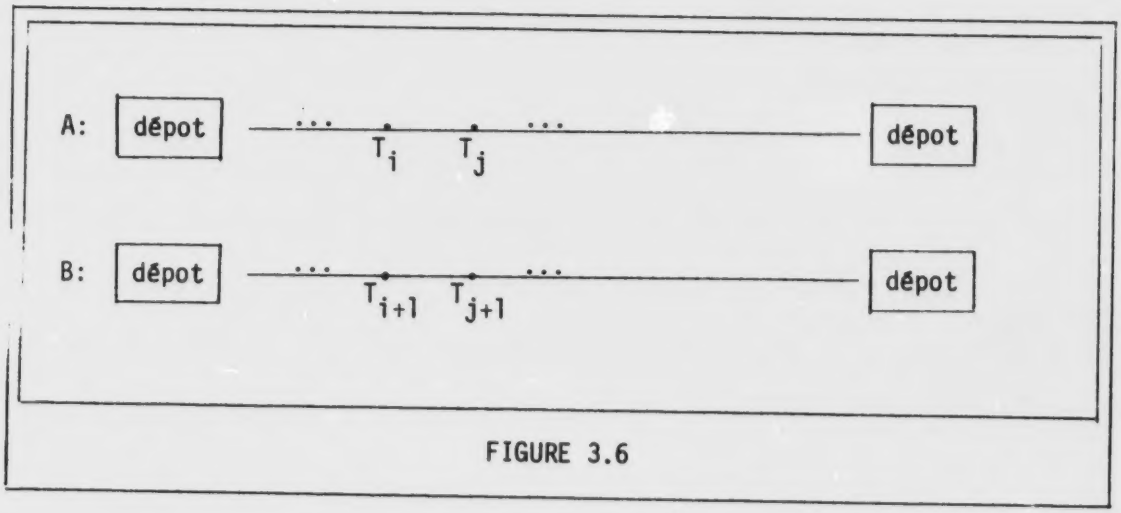


FIGURE 3.6

nous définissons:

TEMPS A: le temps total de parcours de la boucle A .

TEMPS B: le temps total de parcours de la boucle B .

CAPA A : la somme des quantités livrées aux clients de A .

CAPA B : la somme des quantités livrées aux clients de B .

Si CAPA A > CAPA ou CAPA B > CAPA alors itérer sur j et reprendre 3.

Si $c_1 = c_2$ (les deux boucles b_1 et b_2 modifiées sont parcourues par le même chauffeur)

TEMCUM(0,c_1) ← TEMCUM(0,c_1)+DELTAT

TEMCUM(b_1) ← TEMPS A

TEMCUM(b_2) ← TEMPS B

CAPCUM(b_1) ← CAPA A

CAPCUM(b_2) ← CAPA B .

Puisque les deux boucles sont parcourues par le même chauffeur, il importe peu que b_1 devienne A ou B . Reprendre l'étape 2 depuis le début.

Sinon (deux chauffeurs différents parcourent b_1 et b_2 et il faut décider à qui revient la nouvelle boucle A), deux possibilités s'offrent à nous: b_1 devient A et b_2 devient B , ou b_1 devient B et b_2 devient A; définissons

$$\text{TEM A1} = \text{TEMCUM}(0,c_1)-\text{TEMCUM}(b_1)+\text{TEMPS A}$$

$$\text{TEM A2} = \text{TEMCUM}(0,c_2)-\text{TEMCUM}(b_2)+\text{TEMPS A}$$

$$\text{TEM B1} = \text{TEMCUM}(0,c_1)-\text{TEMCUM}(b_1)+\text{TEMPS B}$$

$$\text{TEM B2} = \text{TEMCUM}(0,c_2)-\text{TEMCUM}(b_2)+\text{TEMPS B}$$

Si TEM A1 < H et TEM B2 < H alors l'échange est réalisable et nous l'effectuons:

$$\text{TEMCUM}(0,c_1) \leftarrow \text{TEM A1}$$

$$\text{TEMCUM}(0,c_2) \leftarrow \text{TEM B2}$$

$$\text{TEMCUM}(b_1) \leftarrow \text{TEMPS A}$$

$$\text{TEMCUM}(b_2) \leftarrow \text{TEMPS B}$$

$$\text{CAPCUM}(b_1) \leftarrow \text{CAPA A}$$

$$\text{CAPCUM}(b_2) \leftarrow \text{CAPA B}$$

et reprendre l'étape 2 depuis le début.

Sinon, si TEM A2 < H et TEM B1 < H alors l'échange est réalisable et nous l'effectuons:

$$\text{TEMCUM}(0,c_1) \leftarrow \text{TEM B1}$$

$$\text{TEMCUM}(0,c_2) \leftarrow \text{TEM A2}$$

$$\text{TEMCUM}(b_1) \leftarrow \text{TEMPS B}$$

$$\text{TEMCUM}(b_2) \leftarrow \text{TEMPS A}$$

$$\text{CAPCUM}(b_1) \leftarrow \text{CAPA B}$$

$$\text{CAPCUM}(b_2) \leftarrow \text{CAPA A}$$

et reprendre l'étape 2 depuis le début.

Sinon, itérer sur j et reprendre l'étape 3.

III.4.4 *L'ajout*

Comme nous venons de le voir, à chaque échange réalisé au cours de l'algorithme 2-OPT, correspond une économie sur la distance. Cette économie pourrait ne servir qu'à réduire la consommation de carburant des véhicules de livraison, mais elle peut être utilisée à meilleur escient. Si la somme des économies réalisées avec le 2-OPT permettait de servir de nouveaux clients, ce type d'économie serait plus profitable puisque par définition de l'ensemble E, ces clients sont urgents à servir. La procédure d'ajout vise précisément à ajouter tous les clients possibles en commençant par ceux occasionnant la plus grande amélioration de la fonction économique.

Techniquement, l'ajout consiste à insérer un client entre deux sommets consécutifs du tour. Ces deux sommets sont ou bien deux clients, ou bien le dépot et un client. La figure 3.7 illustre un ajout.

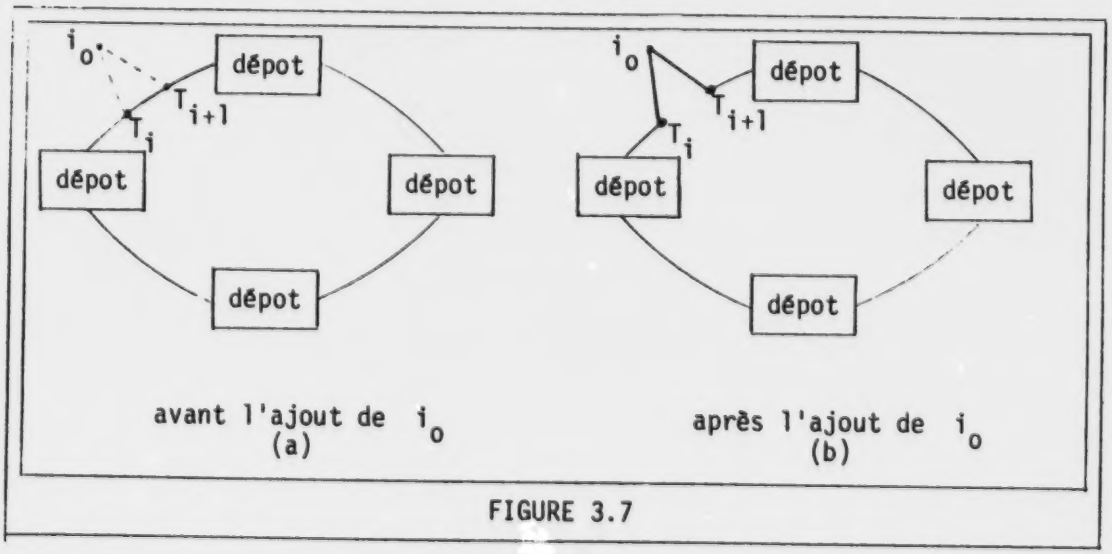


FIGURE 3.7

Un tel ajout n'est réalisable que s'il n'entraîne aucune violation des contraintes de capacité et de temps. A la figure 3.7, l'ajout de i_o augmente le temps de parcours de la boucle b_1 de DELTAT où

$$\text{DELTAT} = t(T_i,i_o)+t(i_o,T_{i+1})-t(T_i,T_{i+1})$$
$$+\text{livr}_{i_o} \times (\text{CAVARI}+\text{CAVARO})+\text{CAFIXE} . \qquad (3.7)$$

Pour être réalisable, l'ajout doit donc respecter:

$$\text{TEMCUM}(0,c_1)+\text{DELTAT} \leq H ,$$

et

$$\text{CAPCUM}(b_1)+\text{livr}_{i_o} \leq \text{CAPA} .$$

Définissons également $\text{DELTAD} = \text{dis}(T_i,i_o)+\text{dis}(i_o,T_{i+1})-\text{dis}(T_i,T_{i+1})$. L'effet global de cet ajout sur la fonction économique est

$$\text{DELTAD} \times 0.40\ \$/\text{km} + 1331.6\mu_{i_o}(p'_{i_o}(1)-p'_{i_o}(0)) . \qquad (3.8)$$

Lorsqu'un ajout est réalisé, certaines possibilités d'ajout disparaissent alors que d'autres s'ajoutent. Plus précisément,

i) à la figure 3.7 (a), tout client j_o hors du tour qui pourrait être ajouté entre T_i et T_{i+1} ne peut plus l'être à la figure 3.7 (b):

ii) en revanche, l'ajout de j_o entre T_i et i_o et entre i_o et T_{i+1} devient possible en 3.7 (b) alors qu'il ne l'était pas en 3.7 (a).

Puisque nous ne faisons aucune mise à jour du heap contenant tous les ajouts possibles, il faudra vérifier l'éligibilité de l'ajout choisi pour se protéger du cas i). De même, suite à chaque ajout il faudra ajouter au heap les

nouveaux ajouts possibles de ii), s'ils sont réalisables. Voici l'algorithme d'ajout:

1- Former un heap de tous les ajouts réalisables (la racine du heap contient l'ajout de valeur minimale, telle que définie en (3.8)).
Pour tout client i_o hors du tour, faire.
Pour toute boucle b du tour, faire.
Soit c le chauffeur parcourant b .
Si CAPCUM(b)+$livr_{i_o}$ > CAPA passer à la boucle suivante. Pour toute paire de points consécutifs p_1,p_2 de b faire. Calculer DELTAT par (3.7) (où T_i et T_{i+1} deviennent p_1 et p_2) .

Si TEMCUM(0,c)+DELTAT > H passer à la paire de points suivante.

Sinon calculer VALEUR par (3.8) et ajouter cette insertion au heap.

2- Explorer le heap.
Retirer la racine du heap.
Vérifier si cette insertion est toujours possible et réalisable, i.e. si i_o est toujours hors du tour; si p_1 et p_2 sont toujours consécutifs dans le tour; si les contraintes de capacité et de temps ne sont pas violées.

Si oui, réaliser l'ajout, modifier le tour et ajouter au heap les nouvelles insertions de type ii) si elles sont réalisables, reprendre l'étape 2 si le heap n'est pas vide.

Sinon reprendre l'étape 2 si le heap n'est pas vide.

III.4.5 Echanges un pour un

L'ajout d'un client augmente le temps de parcours de la boucle où il est inséré. Après plusieurs de ces ajouts, le tour en devient saturé. C'est alors qu'intervient l'échange dit "un pour un", qui retire un client s (s qui sort) du tour, pour le remplacer par un client e (e qui entre) qui était hors du tour. La manière la plus simple de réaliser cet échange est d'intercaler e entre la même paire de points p_1, p_2 qui entouraient s comme l'illustre la figure 3.8.

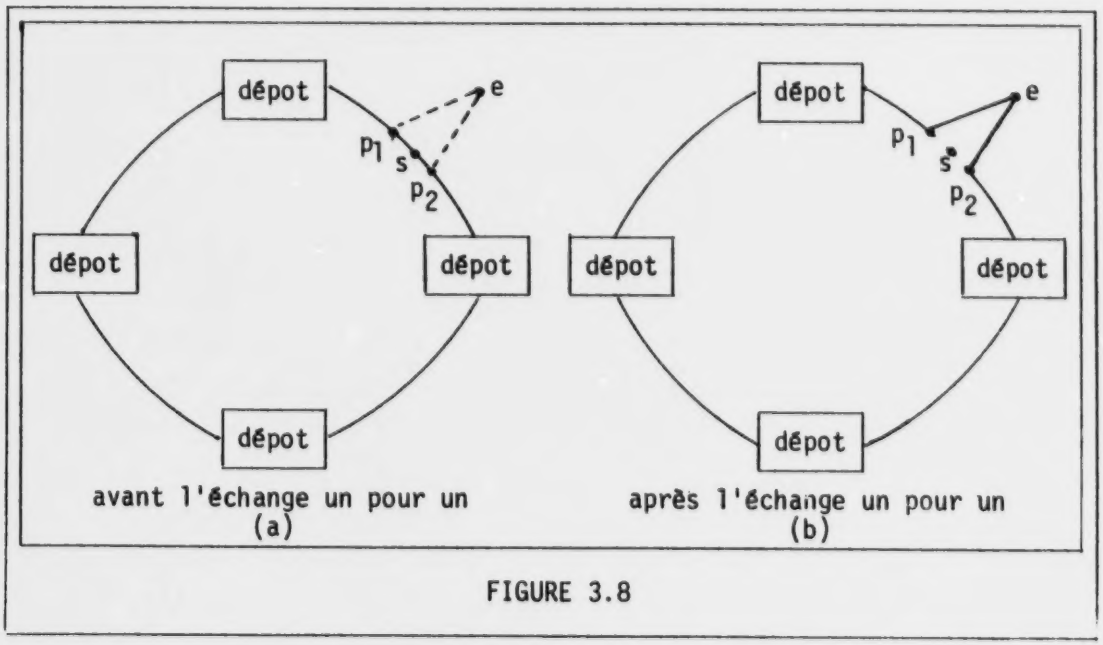


FIGURE 3.8

Cela n'est pas nécessairement la plus efficace. Pour déterminer en effet le meilleur échange, il faut pour un même client e tenter de l'ajouter entre toutes les paires de points consécutifs p_1, p_2 possibles, à la place de tous les clients s du tour. On pourrait croire que cette méthode génère tellement de possibilités que nous soyons forcés de nous restreindre à la

méthode de la figure 3.8. Ce n'est pas le cas. La procédure d'échange un pour un suivant immédiatement celle d'ajout dans l'algorithme, aucun ajout n'est donc possible lorsque débute la procédure d'échange. Concrètement, cela signifie qu'il est inutile de considérer des combinaisons s et e qui ne sont pas sur des boucles du même chauffeur car alors l'insertion de e serait un ajout sur une boucle de l'un d'eux.

Le cas où s et e sont sur des boucles différentes mais d'un même chauffeur est particulier.

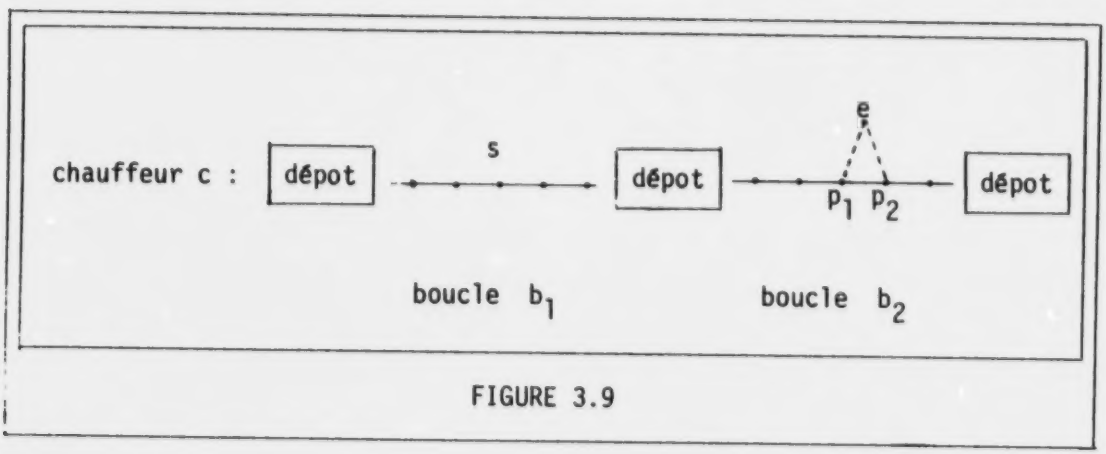


FIGURE 3.9

La figure 3.9 illustre un de ces cas. L'ajout de e sur b_2 pris isolément pourrait ne pas être réalisable à cause de la limite de temps H pour l'ensemble des boucles du chauffeur c mais pourrait le devenir si s était retiré de b_1 . A la fois pour simplifier l'algorithme et pour limiter le nombre de cas possibles nous avons choisi de ne pas considérer ces échanges. Il reste le cas où s et e appartiennent à la même boucle.

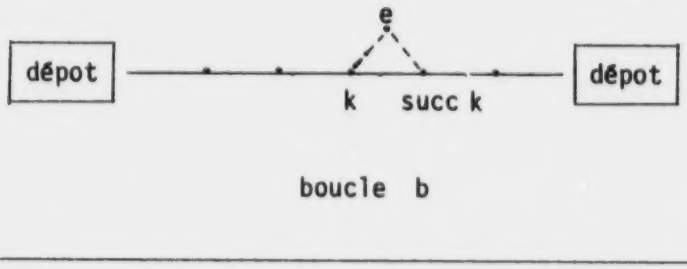


FIGURE 3.10

Le client e peut être ajouté entre toute paire (k,succ k) de points successifs de b . A chaque occasion, le temps de parcours augmente de

$$deltat_k = t(k,e)+t(e,succ\ k)-t(k,succ\ k)+CAFIXE$$

$$+livr_e \times (CAVARI+CAVARO) .$$

En faisant ce calcul pour toute paire (k,succ k) nous déterminons la meilleure paire $(k_o,succ\ k_o)$ pour insérer e , où

$$deltat_{k_o} = \underset{k \in b}{Min} \{deltat_k\} .$$

Si $s \notin \{k_o,succ\ k_o\}$, il est certain que le meilleur échange un pour un avec s et e (s'il en existe un réalisable) est d'insérer e entre k_o et succ k_o et d'éliminer s . Sinon, si $s \in \{k_o,succ\ k_o\}$ il faut reconsidérer l'insertion de e sur la boucle engendrée par l'élimination de s .

Enfin, tout comme pour l'algorithme d'ajout, la réalisation d'un échange un pour un crée de nouvelles possibilités d'échange tout en en éliminant d'autres.

i) Si un échange élimine s_o et ajoute e_o alors toutes les paires du heap ayant $s = s_o$ deviennent invalides et toutes celles insérant un e entre k_o et succ k_o également.

ii) Pour le même échange impliquant s_o et e_o, s_o étant éliminé du tour il devient un nouveau candidat pour y entrer. Enfin, deux nouvelles possibilités d'insertion existent: entre k_o et e_o puis entre e_o et succ k_o.

Nous ne faisons pas la mise-à-jour du heap pour le vider des cas représentés par i). Nous devons donc nous assurer que chaque échange tiré du heap est toujours réalisable. Nous tenons cependant compte des nouvelles possibilités offertes en ii). Voici l'algorithme:

1- Construction du heap des échanges (la valeur minimale est au sommet du heap).

Pour tout client e hors du tour faire.

Pour toute boucle b du tour faire.

Soit c le camion parcourant la boucle b. Calcul de la meilleure paire $(k_o, \text{succ } k_o)$ pour insérer e dans b.

Pour tout client s de la boucle b faire.

Si $s \notin \{k_o, \text{succ } k_o\}$ alors l'échange de s pour e entre k_o et succ k_o est réalisable si

$$CAPCUM(b)+livr_e-livr_s \leq CAPA$$

et

$$TEMCUM(0,c)+deltat_{k_o}+deltat_s \leq H$$

où

$deltat_s$ = t(pred(s),succ(s))-t(pred(s),s)
-t(s,succ(s))-CAFIXE
-$livr_s$ * (CAVARO+CAVARI)

(pred(s): prédécesseur de s ; succ(s): successeur de s).

Si l'échange est réalisable alors la valeur associée à cet échange est

$$V = (deltad_{k_o} + deltad_s) \times 0.4\ \$/km + 1331.6[\mu_e(p'_e(1)-p'_e(0)) + \mu_s(p'_s(0)-p'_s(1))]$$

où $deltad_{k_o}$ = $dis(k_o,e)+dis(e,succ\ k_o)-dis(k_o,succ\ k_o)$

$deltad_s$ = $dis(pred(s),succ(s))-dis(pred(s),s)-dis(s,succ(s))$

si V < 0 alors l'échange est ajouté au heap et itérer sur b, sinon itérer sur s .
Sinon, calculer au long la meilleure insertion pour e puis faire le même cheminement que dans le cas où $s \notin \{k_o, succ\ k_o\}$.

2- Exploration du heap.

Tirer l'échange au sommet du heap.

Vérifier s'il est encore réalisable, i.e. si

- s,k_o et $succ\ k_o$ sont dans le tour et sur la même boucle
- $succ\ k_o$ est le successeur de k_o
- e est hors du tour
- les constantes de temps et capacité ne sont pas violées.

Si oui, réaliser l'échange en modifiant le tour et en ajustant TEMCUM et CAPCUM ajouter les nouvelles possibilités ii) au heap reprendre l'étape 2 si le heap n'est pas vide.

III.4.6 *Mise à jour*

Une fois que les routes du jour J sont définitives, il faut modifier le dossier de chaque client pour tenir compte de la quantité livrée (s'il y a lieu) et de la quantité consommée.

Définissons les paramètres suivants:

$CONSOM_i^J$: consommation réelle du client i le jour J .

$QTEMAX_i$: quantité réelle qui manque, juste avant la livraison, au réservoir du client i pour être plein

$$QTEMAX_i = r_i - litr_i - 0.5 \times CONSOM_i^J \quad . \qquad (3.9)$$

$QTEMAX_i$ représente la quantité maximale pouvant être livrée au client i car on ne peut pas "suremplir" un réservoir.

$QTELIV_i$: quantité réelle livrée au client i le jour J . Elle dépend de $QTEMAX_i$ et $livr_i$ comme on le verra.

Pour chaque boucle b faire.

Allouer au véhicule c parcourant b un $SURPLUS_b$ de mazout d'au plus 5% de CAPCUM(b). C'est moins de 5% si une contrainte est violée par cet ajout. Visiter les clients de b un par un selon l'ordre sur la boucle. Déterminer $QTEMAX_i$ selon (3.9), pour tout client i de b .

Si $livr_i \geq QTEMAX_i$ alors

$QTELIV_i = QTEMAX_i$

$SURPLUS_b = SURPLUS_b + (livr_i - QTEMAX_i)$.

Sinon $QTELIV_i = MIN\{QTEMAX_i, livr_i+SURPLUS_b\}$

$SURPLUS_b = SURPLUS_b-(QTELIV_i-livr_i)$

$\beta_i = litr_i+QTELIV_i-0.5\times CONSOM_i^J$

car nous supposons que toutes les livraisons ont lieu à midi le jour de livraison.

Pour tout client i (que i soit visité ou non) faire

$litr_i = litr_i+QTELIV_i-CONSOM_i^J$

(si i n'est pas visité alors $QTELIV_i = 0$) .

Si $litr_i < 0$ alors il y a pénurie et nous supposons qu'une livraison spéciale remplit le réservoir du client i , à midi, de sorte que

$litr_i = r_i-0.5\times CONSOM_i^J$

$\beta_i = r_i$

$nj_i = 0$.

Sinon $nj_i = nj_i+1$.

CHAPITRE IV

LE CHOIX DES CLIENTS ET LA FONCTION ÉCONOMIQUE

Ce chapitre est un prélude à la description de la deuxième approche. Il décrit le mode de sélection des clients qu'il y a intérêt à visiter et la fonction économique utilisés. Nous y avons regroupé les principaux éléments probabilistes en jeu. La nature, qui nous avait habitué à un comportement harmonieux (lire "avec toutes les propriétés désirées") est plus rebelle ici. Elle vend chèrement sa peau et c'est non sans compromis que nous arrivons à nos fins, particulièrement dans le choix de la fonction économique.

IV.1 NOTIONS PROBABILISTES

Un calcul qui reviendra souvent est celui de

P_{ik} : la probabilité de pénurie du client i exactement le $k^{ième}$ jour suivant la dernière livraison étant donné que lors de cette livraison le réservoir a été complètement rempli.

Sachant que la consommation du client i le jour j, $C_i^j | DJ_j$, est distribuée selon une $N(\mu_i DJ_j , \sigma^2 DJ_j^2)$ et que les $C_i^j | DJ_j$ sont mutuellement indépendants par rapport à j (voir le chapitre 2), alors la consommation totale pour les k premiers jours suivant une livraison, $\sum_{j=1}^{k} C_i^j$ (pour le calcul du SC le moment de la livraison importe peu et nous avons supposé que toutes

les livraisons avaient lieu simultanément à 23h.59 le jour de la livraison. Plus loin, pour être plus réaliste nous les supposerons toutes simultanées mais à 12h.00 cette fois. De plus, tout comme au chapitre précédent, toutes les probabilités et distributions qui suivent doivent être interprétées comme étant conditionnelles à la connaissance des DJ_j) est distribué selon une normale

$$\sum_{j=1}^{k} C_i^j : N(\mu_i \sum_{j=1}^{k} DJ_j \ , \ \sigma^2 \sum_{j=1}^{k} DJ_j^2)$$

dont la fonction de densité est le produit des fonctions de densité des C_i^j . Notons par f_i^j la fonction de densité de C_i^j , alors

$$p_{ik} = \int_{-\infty}^{r_i} \int_{-\infty}^{r_i - x_1} \cdots \int_{-\infty}^{r_i - \sum_{j=1}^{k-2} x_j} \int_{r_i - \sum_{j=1}^{k-1} x_j}^{\infty} f_i^1(x_1) \times \ldots \times f_i^k(x_k) dx_k \, dx_1$$

(car une pénurie survient exactement le k-ième jour si la consommation au cours des k-1 premiers jours n'excède pas la capacité r_i du réservoir, alors que cette consommation totale l'excède au k-ième jour).

$$= \int_{-\infty}^{r_i} \int_{-\infty}^{r_i - x_1} \cdots \int_{-\infty}^{r_i - \sum_{j=1}^{k-2} x_j} f_i^1(x_1) \times \ldots \times f_i^{k-1}(x_{k-1}) \left[1 - \int_{-\infty}^{r_i - \sum_{j=1}^{k-1} x_j} f_i^k(x_k) dx_k \right] \times dx_{k-1} \cdots dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{r_i} \cdots \int_{-\infty}^{r_i - \sum_{j=1}^{k-2} x_j} f_i^1(x_1) \ \ldots \ f_i^{k-1}(x_{k-1}) dx_{k-1} \cdots dx_1$$

$$- \int_{-\infty}^{r_i} \cdots \int_{-\infty}^{r_i - \sum_{j=1}^{k-1} x_j} f_i^1(x_1) \times \ldots \times f_i^k(x_k) dx_k \cdots dx_1$$

$$= \Pr[\sum_{j=1}^{k-1} C_i^j \leq r_i] - \Pr[\sum_{j=1}^{k} C_i^j \leq r_i] \ . \qquad (4.1)$$

En particulier,

$$P_{i1} = \int_{r_i}^{\infty} f_i^1(x_1)dx_1 = 1-Pr[\sum_{j=1}^{1} C_i^j \leq r_i]$$

de sorte que

$$\sum_{j=1}^{k} P_{ij} = (1-Pr[\sum_{j=1}^{1} C_i^j \leq r_i]) + (Pr[\sum_{j=1}^{1} C_i^j \leq r_i]-Pr[\sum_{j=1}^{2} C_i^j \leq r_i]) + \ldots$$

$$+ (Pr[\sum_{j=1}^{k-1} C_i^j \leq r_i]-Pr[\sum_{j=1}^{k} C_i^j \leq r_i]) \quad \text{(par 4.1)}$$

$$= 1 - Pr[\sum_{j=1}^{k} C_i^j \leq r_i] . \qquad (4.2)$$

Or $\sum_{j=1}^{k} C_i^j$ étant distribué normalement $N(\mu_i \sum_{j=1}^{k} DJ_j , \sigma^2 \sum_{j=1}^{k} DJ_j^2)$ alors

$$Pr[\sum_{j=1}^{k} C_i^j \leq r_i] = Pr[z \leq (r_i-\mu_i \sum_{j=1}^{k} DJ_j)/(\sigma\sqrt{\sum_{j=1}^{k} DJ_j^2}) \quad , \text{ où } \quad z : N(0,1)$$

$$= F_{N(0,1)}(b_{ik})$$

où

$$b_{ik} = (r_i-\mu_i \sum_{j=1}^{k} DJ_j)/(\sigma\sqrt{\sum_{j=1}^{k} DJ_j^2}) \qquad (4.3)$$

$Pr[\sum_{j=1}^{k} C_i^j \leq r_i]$ est noté f_{ik} et donc $f_{ik} = F_{N(0,1)}(b_{ik})$. (4.4)

Les quantités $\overline{P}_{ik}(w)$, $\overline{F}_{ik}(w)$, $\overline{B}_{ik}(w)$ définissent des notions proches parentes des p_{ik}, f_{ik} et b_{ik} , mais elles possèdent la dimension supplémentaire de faire varier la quantité livrée w .

$\overline{P}_{ik}(w)$ = probabilité de pénurie du client i exactement le $k^{ième}$ jour suivant une livraison faite maintenant, étant donné qu'il ne reste plus que $\overline{\beta}$ litres, en moyenne, (c'est un estimé) dans le réservoir et que w litres sont livrés.

REMARQUE: $\overline{P}_{ik}(w)$ dépend également de $\overline{\beta}$ et de ce fait, la notation $\overline{P}_{ik}(w,\overline{\beta})$ serait plus appropriée. Tout au long des développement qui suivront, toutefois, $\overline{\beta}$ sera toujours égal au niveau moyen du réservoir au moment considéré. Il en est de même pour les autres fonctions introduites dans cette section.

Par un raisonnement analogue au précédent nous dérivons les relations.

$$\overline{P}_{ik}(w) = \int_{-\infty}^{\overline{\beta}+w}\int_{-\infty}^{\overline{\beta}+w-x_0}\cdots\int_{-\infty}^{\overline{\beta}+w-\sum_{j=0}^{k-2}x_j}\int_{\overline{\beta}+w-\sum_{j=0}^{k-1}x_j}^{\infty} f_i^0(x_0)f_i^1(x_1)\cdots f_i^k(x_k)dx_k\cdots dx_1dx_0$$

où f_i^0 est la fonction de densité de la consommation de la demie-journée suivant le moment de la livraison qui a lieu à 12h00 ,

$$= \Pr[0.5C_i^0 + \sum_{j=1}^{k-1} C_i^j \leq \overline{\beta}+w] - \Pr[0.5C_i^0 + \sum_{j=1}^{k} C_i^j \leq \overline{\beta}+w] ,$$

si on suppose que la consommation et les DJ du jour de la livraison sont les mêmes de 00h01 à 12h00 et de 12h01 à 24h00 .

$$\sum_{j=0}^{k} \overline{P}_{ij}(w) = 1 - \Pr[0.5C_i^0 + \sum_{j=1}^{k} C_i^j \leq \overline{\beta}+w]$$

$$\triangleq 1 - \overline{F}_{ik}(w) . \qquad (4.5)$$

De plus,

$$\bar{F}_{ik}(w) = Pr[0.5C_i^0 + \sum_{j=1}^{k} C_i^j \leq \bar{\beta}+w]$$

$$= Pr[z \leq (\bar{\beta}+w-\mu_i[0.5DJ_o + \sum_{j=1}^{k} DJ_j])/(\sigma\sqrt{(0.5DJ_o)^2 + \sum_{j=1}^{k} DJ_j^2})],$$

où $Z : N(0,1)$

et

$$\bar{B}_{ik}(w) \triangleq (\bar{\beta}+w-\mu_i[0.5DJ_o + \sum_{j=1}^{k} DJ_j])/(\sigma\sqrt{(0.5DJ_o)^2 + \sum_{j=1}^{k} DJ_j^2}) .$$

Pour alléger, nous définissons la notation suivante:

$$\sum^{k} DJ_j \triangleq 0.5DJ_o + \sum_{j=1}^{k} DJ_j$$

$$\sum^{k} DJ_j^2 \triangleq (0.5DJ_o)^2 + \sum_{j=1}^{k} DJ_j^2 .$$

Les identités suivantes qui en découlent seront utiles par la suite

$$\bar{B}'_{ik}(w) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\sum^{k} DJ_j^2}} .$$

La fonction de répartition F d'une distribution $N(0,1)$ étant donnée par

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx , \quad -\infty < y < \infty ,$$

il s'ensuit que

$$\bar{F}_{ik}(w) = \int_{-\infty}^{\bar{B}_{ik}(w)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx ,$$

$$\bar{F}'_{ik}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\bar{B}^2_{ik}(w)}{2}} \times \bar{B}'_{ik}(w) \quad \text{(voir [13, p. 83], par exemple)}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi \sum_{j}^{k} DJ_j^2}} e^{-\frac{\bar{B}^2_{ik}(w)}{2}} > 0 , \tag{4.6}$$

$$\bar{F}''_{ik}(w) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi \sum_{j}^{k} DJ_j^2}} \times e^{-\frac{\bar{B}^2_{ik}(w)}{2}} \left(\frac{-2\bar{B}_{ik}(w)}{2}\right) \times \bar{B}'_{ik}(w)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi\, \sigma^2 \sum_{j}^{k} DJ_j^2}} \bar{B}_{ik}(w) e^{-\frac{\bar{B}^2_{ik}(w)}{2}} < 0 \quad \text{pour} \quad w > \mu_i \sum_{j}^{k} DJ_j - \bar{\beta} \tag{4.7}$$

Nous introduisons également les fonctions suivantes, où cette fois-ci la quantité livrée w l'est exactement au moment où w litres viennent tout juste d'être consommés en moyenne depuis la dernière livraison.

$$\bar{\bar{B}}_{ik}(w) = \frac{\bar{\beta}}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{k-1} DJ_j^2 + S^2 DJ_k^2}} , \text{ où } w = \mu_i \left[\sum_{j}^{k-1} DJ_j + S\, DJ_k\right] , \tag{4.8}$$

pour un $S \in (0,1]$

$$\bar{\bar{F}}_{ik}(w) = F_{N(0,1)}(\bar{\bar{B}}_{ik}(w)) . \tag{4.9}$$

Par conséquent

$$\bar{\bar{B}}'_{ik}(w) = \frac{\bar{\beta}}{\sigma}(-\frac{1}{2})[\sum^{k-1} DJ_j^2 + (\frac{w}{\mu_i} - \sum^{k-1} DJ_j)^2]^{-3/2} \times 2(\frac{w}{\mu_i} - \sum^{k-1} DJ_j) \times \frac{1}{\mu_i}$$

$$= -\frac{\bar{\beta}}{\sigma\mu_i} \frac{(\frac{w}{\mu_i} - \sum^{k-1} DJ_j)}{[\sum^{k-1} DJ_j^2 + (\frac{w}{\mu_i} - \sum^{k-1} DJ_j)^2]^{3/2}} . \qquad (4.10)$$

De fait cette expression n'est valide que dans l'intervalle $(\mu_i \sum^{k-1} DJ_j, \mu_i \sum^{k} DJ_j)$ car aux extrémités, par exemple en $\mu_i \sum^{k} DJ_j$, on a:

$$\lim_{w \to (\mu_i \sum^{k} DJ)^-} \bar{\bar{B}}'_{ik}(w) = -\frac{\bar{\beta}}{\sigma\mu_i} \frac{(\frac{\mu_i \sum^{k} DJ_j}{\mu_i} - \sum^{k-1} DJ_j)}{[\sum^{k-1} DJ_j^2 + (\frac{\mu_i \sum^{k} DJ_j}{\mu_i} - \sum^{k-1} DJ_j)^2]^{3/2}}$$

$$= -\frac{\bar{\beta}}{\sigma\mu_i} \frac{DJ_k}{[\sum^{k} DJ_j^2]^{3/2}}$$

alors que

$$\lim_{w \to (\mu_i \sum^{k} DJ_j)^+} \bar{\bar{B}}_{ik+1}(w) = -\frac{\bar{\beta}}{\sigma\mu_i} \frac{(\frac{\mu_i \sum^{k} DJ_j}{\mu_i} - \sum^{k} DJ_j)}{[\sum^{k} DJ_j^2 + (\frac{\mu_i \sum^{k} DJ_j}{\mu_i} - \sum^{k} DJ_j)^2]^{3/2}}$$

$$= -\frac{\bar{\beta}}{\sigma\mu_i} \frac{0}{[\sum^{k} DJ_j^2]^{3/2}} = 0$$

et donc la juxtaposition de $\bar{\bar{B}}'_{ik}$ et $\bar{\bar{B}}'_{ik+1}$ sur $(\mu_i \sum_{}^{k-1} DJ_j , \mu_i \sum_{}^{k+1} DJ_j)$ est discontinue en $\mu_i \sum_{}^{k} DJ_j$ si $DJ_k > 0$.

Il en est de même pour $\bar{\bar{B}}''_{ik}(w)$ ci-dessous, dont l'expression donnée n'est valide que dans l'intervalle $(\mu_i \sum_{}^{k-1} DJ_j , \mu_i \sum_{}^{k} DJ_j)$.

$$\bar{\bar{B}}''_{ik}(w) = -\frac{\bar{\beta}}{\sigma\mu_i} \frac{(\frac{1}{\mu_i}[\sum^{k-1} DJ_j^2+(\frac{w}{\mu_i}-\sum^{k-1} DJ_j)^2]^{3/2} -(\frac{w}{\mu_i}-\sum^{k-1} DJ_j)\frac{3}{2}[\sum^{k-1} DJ_j^2+(\frac{w}{\mu_i}-\sum^{k-1} DJ_j)^2]^{1/2}\times 2\times(\frac{w}{\mu_i}-\sum^{k-1} DJ_j)\frac{1}{\mu_i})}{[\sum^{k-1} DJ_j^2+(\frac{w}{\mu_i}-\sum^{k-1} DJ_j)^2]^3}$$

$$= \frac{-\bar{\beta}}{\sigma\mu_i^2[\sum^{k-1} DJ_j^2+(\frac{w}{\mu_i}-\sum^{k-1} DJ_j)^2]^{3/2}} \times (1-3(\frac{w}{\mu_i}-\sum^{k-1} DJ_j)^2(\sum^{k-1} DJ_j^2+(\frac{w}{\mu_i}-\sum^{k-1} DJ_j)^2)^{-1})$$

$$= \frac{-\bar{\beta}}{\sigma\mu_i^2[\sum^{k-1} DJ_j^2+s^2DJ_k^2]^{3/2}} (1-3\frac{(sDJ_k)^2}{\sum^{k-1} DJ_j^2+s^2DJ_k^2}) \qquad (4.11)$$

et $\bar{\bar{F}}_{ik}(w) = \int_{-\infty}^{\bar{\bar{B}}_{ik}(w)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$$\bar{\bar{F}}'_{ik}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\bar{\bar{B}}^2_{ik}}{2}(w)} \bar{\bar{B}}'_{ik}(w) \text{ , (voir [13, p. 83])} \qquad (4.12)$$

$$\bar{\bar{F}}''_{ik}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{ e^{-\frac{\bar{\bar{B}}^2_{ik}(w)}{2}} (-\frac{2\bar{\bar{B}}_{ik}(w)}{2}) \bar{\bar{B}}'_{ik}(w) \times \bar{\bar{B}}'_{ik}(w) + e^{-\frac{\bar{\bar{B}}^2_{ik}(w)}{2}} \times \bar{\bar{B}}''_{ik}(w) \}$$

$$= \frac{e^{-\frac{\bar{\bar{B}}^2_{ik}(w)}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \{ -\bar{\bar{B}}_{ik}(w) (\bar{\bar{B}}'_{ik}(w))^2 + \bar{\bar{B}}''_{ik}(w) \} . \qquad (4.13)$$

Finalement, nous introduisons B_{ik} et F_{ik} pour lesquels il n'y a pas véritablement de justification intuitive.

$$B_{ik}(w) = \frac{w - r_i - 25.0}{\sigma \sqrt{\sum_{j=1}^{J_i} DJ_j^2}} ,$$

où J_i est une constante indépendante de w,
et $F_{ik}(w) = F_{N(0,1)}(B_{ik}(w))$.

$$B'_{ik}(w) = \frac{1}{\sigma \sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}$$

$$F_{ik}(w) = \int_{-\infty}^{B_{ik}(w)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx ;$$

$$F'_{ik}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{B^2_{ik}(w)}{2}} B'_{ik}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma \sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}} e^{-\frac{B^2_{ik}(w)}{2}} ; \qquad (4.14)$$

$$F''_{ik}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}} \{e^{-\frac{B_{ik}^2(w)}{2}} (\frac{-2B_{ik}(w)}{2}) \times B'_{ik}(w)\}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^2 \sum_{j}^{J_i} DJ_j^2} e^{-\frac{B_{ik}^2(w)}{2}} B_{ik}(w) \; ; \qquad (4.15)$$

$$F'''_{ik}(w) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^2 \sum_{j}^{J_i} DJ_j^2} \{e^{-\frac{B_{ik}^2(w)}{2}} (\frac{-2B_{ik}(w)}{2}) B'_{ik}(w) \times B_{ik}(w) + e^{-\frac{B_{ik}^2(w)}{2}} B'_{ik}(w)\}$$

$$= \frac{e^{-\frac{B_{ik}^2(w)}{2}}}{\sqrt{2\pi}(\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2})^3} \{(\frac{w-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}})^2 - 1\} \; . \qquad (4.16)$$

IV.2 *LE CHOIX DES CLIENTS*

Le processus de choix des clients est un des principaux aspects qui différencie nos deux approches. Cette première étape de la deuxième approche est d'autant plus importante, qu'une fois terminée, il n'y a plus de retour en arrière possible: ce n'est que parmi ces clients que l'on puisera pour construire les routes du lendemain. Cette pré-sélection de clients se justifie d'elle-même. Il est impensable, pour des raisons

d'espace mémoire et de temps d'exécution, de trimbaler tous les clients tout au long de l'algorithme. Il faut restreindre les candidats à des proportions plus digestes.

IV.2.1 Approche proposée

Nous avons conservé le principe d'un "seuil critique" (noté SC, et exprimé en litres) en deçà duquel on ne permet pas d'aller. Suite à la remarque faite en introduction, nous l'avons personnalisé pour qu'il ne soit plus un pourcentage uniforme pour tous les clients mais plutôt variable selon le taux de consommation propre à chacun d'eux.

L'algorithme de sélection procède comme suit:

étape 1: pour tout client i déterminer son SC_i ,

étape 2: à partir du SC_i , déterminer le jour où, en moyenne, ce niveau sera atteint pour la première fois. On qualifie ce jour de "meilleur jour" de livraison pour le client i ,

étape 3: la banque de clients avec lesquels nous construirons les routes du jour J est finalement constituée. Elle inclut ceux dont le meilleur jour est J, J+1, J+2, J+3 ou J+4 , avec un maximum de deux cents (200) clients. Elle inclut également tous les clients dont le meilleur jour est inférieur à J et qui pour des raisons de capacité n'ont pu être encore desservis.

Le calcul du meilleur jour à l'étape 2 est une formalité. Puisque l'on a déjà fait l'hypothèse de connaître exactement les degrés-jour futurs, la consommation moyenne à la fin du jour k est:

$$\mu_i \sum_{}^{k} DJ_j$$

(nous supposons en effet que toutes les livraisons ont lieu chaque jour à midi, de sorte que le client visité a une demie-journée de consommation à la fin de cette journée). Si le client i a été visité il y a nj_i jours et qu'il avait β_i litres suite à cette visite $(\beta_i \leq r_i)$, alors en moyenne, le niveau SC_i sera atteint au cours du jour k^* tel que

$$\underbrace{\beta_i - \mu_i [0.5DJ_{-nj_i-1} + \sum_{j=-nj_i}^{-1} DJ_j + \sum_{j=1}^{k^*} DJ_j]}_{\text{= espérance du niveau du réservoir à la fin du jour } k^*} \leq SC_i < \underbrace{\beta_i - \mu_i [0.5DJ_{-nj_i-1} + \sum_{j=-nj_i}^{-1} DJ_j + \sum_{j=1}^{k^*-1} DJ_j]}_{\text{= espérance du niveau du réservoir à la fin du jour } k^*-1}$$

(où DJ_{-t} désigne le nombre de degrés-jour durant le t^e jour précédant le moment de la planification des routes du jour 1).

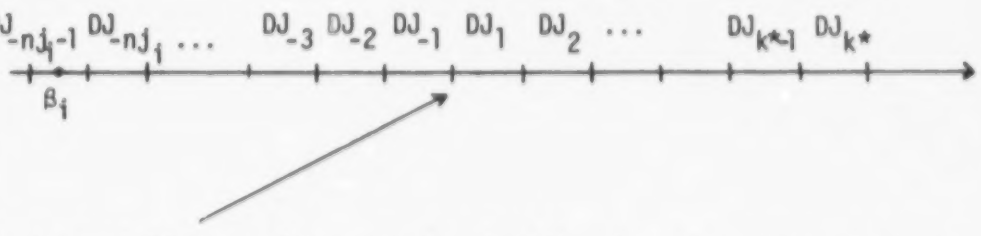


FIGURE 4.1

L'étape 3 n'a pas besoin d'explication si ce n'est que lorsque la limite des 200 clients est atteinte, nous commençons par supprimer les clients du jour J+4 , puis ceux du jour J+3 si ce n'est pas suffisant, etc... . Lorsqu'il ne reste plus qu'une fraction des clients d'une journée à supprimer nous les éliminons au hasard. Ce n'est pas la manière la plus efficace, mais c'est rapide. Nous aurions pu ne conserver que ceux consommant le plus rapidement et qui ont la plus faible marge de sécurité d'ici la pénurie.

Il ne reste plus que le calcul même du SC à éclaircir. Ce calcul est fait individuellement et de façon indépendante pour chaque client. Nous nous sommes ici inspirés des travaux de Dror [3].

IV.8.8 Calcul du SC

Oublions pour l'instant qu'il puisse arriver (rarement) qu'on ne puisse remplir complètement le réservoir d'un client. Supposons que l'on vienne de remplir le réservoir d'un client et que nous cherchions le meilleur jour pour la prochaine livraison, meilleur au sens de celui occasionnant les coûts les plus bas sur une période de référence, disons un an. Rappelons les coûts impliqués:

- chaque livraison occasionne des frais de déplacement: essence consommée par le camion, entretien du camion, etc... . Ces coûts tendent à nous faire visiter un client le moins souvent possible;

- un client en pénurie occasionne des coûts dits de "pénalité": en plus des coûts d'une livraison spéciale il y a le risque de perdre le client au profit d'un compétiteur. Ces coûts ont la tendance inverse des premiers et nous obligent à rapprocher nos visites chez un même client.

Soient

A = nombre de degrés-jour durant l'année à venir ($A \cong 5250DJ$)

CT_i = coût normal de transport en cas de livraison sans qu'il n'y ait pénurie

K_i = coût de pénalité en cas de panne (inclut les coûts de livraison et le risque de perdre le client) ($K_i > CT_i$)

k = nombre de jours prévu d'ici la prochaine livraison normale (si l'on se situe juste après une livraison)

M_i = jour moyen où survient la pénurie du client i , i.e.:

$$\mu_i \sum^{M_i-1} DJ_j < r_i \leq \mu_i \sum^{M_i} DJ_j$$

r_i = capacité du réservoir du client i .

Scénario #1: On remplit le réservoir du client i dès que le niveau de son réservoir atteint celui qui sera atteint à midi le $k^{ième}$ jour suivant la dernière livraison. La quantité livrée en moyenne à ce moment peut être interprétée comme la demande du client i , k jours après une livraison et est notée d_{ik} pour cette raison.

REMARQUE: En raison de la variation des degrés-jour, d_{ik} n'est pas toujours atteint k jours après une livraison. Ce sera exactement k à la première livraison (par définition de d_{ik}) mais par la suite ce peut être plus ou moins.

De plus,

p_{ik} = probabilité de pénurie du client i exactement le $k^{ième}$ jour suivant la dernière livraison, au cours de laquelle le réservoir avait été rempli complètement,

$EC_i[j,k]$ = espérance du coût total pour les j prochains jours si l'on planifie une livraison normale dès que la demande du client i atteint d_{ik} .

Pour évaluer $EC_i[365,k]$ nous avons

$$EC_i[365,k] = p_{i1}[K_i+EC_i[364,k]]+p_{i2}[K_i+EC_i[363,k]]$$

$$+ \ldots + p_{ik-1}[K_i+EC_i[365-(k-1),k]]$$

$$+ (1-\sum_{j=1}^{k-1} p_{ij})[CT_i+EC_i[365-k,k]] \; . \qquad (4.17)$$

$EC_i[365-j,k]$ a une expression semblable à $EC_i[365,k]$ mais où le nombre de jours pour atteindre d_{ik} n'est pas forcément k en raison de la variation des DJ_j . En d'autres mots, la résolution de (4.17) par récurrence est abandonnée pour sa trop grande complexité.

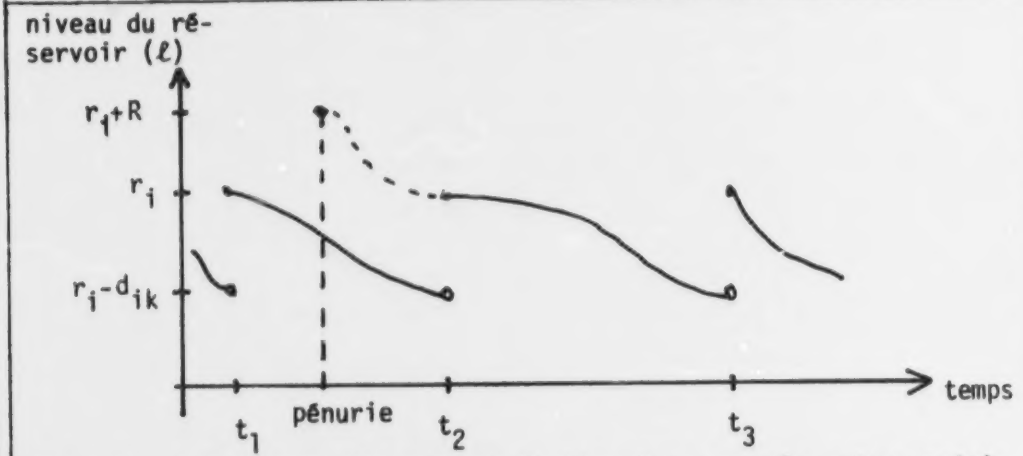
Scénario #2: Plutôt que de rechercher l'expression exacte de l'espérance des coûts annuels pour l'année à venir, conservons le scénario #1 mais utilisons une approximation des coûts. Soit

EC_{ik} = espérance du coût annuel pour le client i si l'on planifie une livraison normale dès que sa demande atteint d_{ik} $(d_{ik}>0)$.

S'il ne survenait aucune pénurie, il y aurait $A\mu_i/d_{ik}$ livraisons durant l'année, chacune occasionnant un coût de transport CT_i. Afin d'inclure plus simplement les coûts de pénalité, nous posons les deux hypothèses suivantes:

i) entre deux livraisons normales prévues originalement, il ne peut survenir plus d'une pénurie;

ii) au moment d'une pénurie, le réservoir est "surempli" de telle sorte que lorsque l'on atteindra le prochain moment de livraison normale prévu originalement, le réservoir sera plein (i.e. de niveau égal à r_i) tout comme cela l'aurait été s'il n'y avait pas eu pénurie et qu'une livraison normale avait eu lieu. Cette situation est illustrée à la figure 4.2. Au moment de la pénurie indiquée, on a dû "suremplir" le réservoir jusqu'au niveau r_i+R pour qu'à la prochaine livraison prévue originalement (i.e. en t_2) le réservoir soit précisément au niveau r_i.



t_i , i = 1,2,3 sont des moments de livraison normale prévus originalement. Le trait plein _____ sur le graphe indique le niveau du réservoir en moyenne, i.e. selon une consommation toujours égale à μ_i ℓ/DJ .

FIGURE 4.2

Ces hypothèses nous procurent $A\mu_i/d_{ik}$ périodes semblables et indépendantes. Au cours de chacune d'elles, ou bien il survient une pénurie le jour 1, ou bien il en survient une le jour 2,..., ou bien il en survient une le jour précédant le jour de livraison normale prévu, ou bien il n'y a aucune pénurie et une livraison normale est complétée le jour prévu (ce sont tous des OU exclusifs). Il y a donc exactement une livraison par période. Il ne reste plus qu'à faire l'hypothèse simplificatrice suivante: En raison de la variation des DJ_j au cours de l'année à venir, les $A\mu_i/d_{ik}$ périodes ne sont pas toutes de durée égale, ni composées de jours

ayant les mêmes DJ . Ainsi, le risque de pénurie, qui a la valeur $\sum_{j=1}^{k-1} p_{ij}$ pour la première de ces périodes varie en général d'une période à l'autre. Pour simplifier, nous supposons que ce risque est uniforme et toujours égal à $\sum_{j=1}^{k-1} p_{ij}$, de sorte que

$$EC_{ik} = A\mu_i/d_{ik}[K_i \sum_{j=1}^{k-1} p_{ij} + CT_i(1-\sum_{j=1}^{k-1} p_{ij})]$$

$$= A\mu_i/d_{ik}[K_i+(CT_i-K_i)f_{ik-1}] \text{ , par (4.2) et (4.4) .} \qquad (4.18)$$

Par conséquent, SC_i sera spécifié en déterminant le jour k minimisant EC_{ik} .

N'ayant pu démontrer qu'en général EC_{ik} est convexe, nous avons simulé des suites $\{EC_{ik}\}_k$ pour différentes paires de μ_i, σ^2 $(\frac{\sigma}{\mu_i} \leq 1)$ et différents r_i . Il ressort de cette simulation que:

i) la suite est d'abord strictement décroissante jusqu'à atteindre un minimum en k^* (bien sûr $k^* \leq M_i$) . La suite peut ne pas être convexe

ii) de k_i^* à M_i la suite croît, mais là encore n'est pas nécessairement convexe.

Evidemment ces observations ne sont valides que pour les données sur les degrés-jour dont nous disposions. Il importe quand même de retenir l'unimodularité de la suite qui facilite la recherche du minimum. Nous avons donc opté pour la formule (4.18) et le calcul de SC_i est le suivant:

1) évaluer EC_{ik} jusqu'à ce que pour une première fois $EC_{ik+1} \geq EC_{ik}$.

$$2)\quad k^* = k \quad \text{et} \quad SC_i = r_i - d_{ik} \cdot \qquad (4.19)$$

IV.3 LA FONCTION ÉCONOMIQUE

Dans notre modélisation, la consommation est intimement liée à la température. Cette dernière étant en gros cyclique sur un an, il apparaît naturel de mesurer les performances de l'entreprise sur une période annuelle. D'autre part, l'entreprise a à faire des choix sur une base quotidienne:

- quels seront les clients visités le lendemain (on suppose que la planification des opérations se fait la veille),
- quelle quantité de mazout leur sera livrée.

Etant donné l'aspect quotidien de ces choix, nous serions tentés d'y associer une fonction économique reflétant des coûts quotidiens:

- les coûts de pénalité possiblement encourus le lendemain,
- les coûts de transport pour le lendemain.

Une telle approche est toutefois handicapée par son regard myope sur le problème. En se contentant de minimiser les coûts d'opération pour une seule journée à la fois, l'entreprise s'expose à reporter au lendemain le plus de livraisons possible (pour diminuer les coûts de transport de la journée de planification). Elle risque de devoir faire, le lendemain des livraisons qu'il aurait été plus économique d'effectuer maintenant, de

sorte qu'au total pour ces deux (2) jours la solution n'est pas optimale. Nous avons d'ailleurs nous-mêmes pu vérifier cette tendance lorsque nous avons introduit des coûts journaliers.

Dans la section 2.2, nous avons utilisé des coûts annuels qui étaient satisfaisants non seulement du point de vue du concept, mais également du point de vue du comportement (unimodularité). Ces résultats reposaient sur l'hypothèse que le réservoir du client était complètement rempli tandis que le jour de livraison variait. Dans cette section-ci, nous désirons une expression des coûts (annuels, pour contrer l'effet de myopie) qui permette de faire varier la quantité livrée alors que le jour de livraison est fixé au lendemain. Il faut formaliser l'approche pour réduire la prise de décision à un problème de minimisation des coûts ainsi définis. Les algorithmes de résolution que nous désirons utiliser (voir le chapitre suivant) exigent de plus que la fonction économique soit strictement convexe et continuement différentiable (i.e. de classe C').

IV.3.1 *Quelques approches possibles*

Comment parler de coûts annuels associés à une livraison qui ne porte que sur le lendemain? Il faut pour cela faire des hypothèses sur les livraisons de toute l'année à venir. Dénotons par

w_i : la quantité livrée (en litres) au client i le lendemain,

$w_i \geq 0$. $w_i = 0$ signifie que le client i n'est pas visité.

REMARQUE: L'examen et la définition de EC_i en $w_i = 0$ sont reportés à la section 4.4.

Faisons l'hypothèse suivante pour l'année à venir: si demain $w_i > 0$ est livré au client i dont le réservoir ne contient plus, juste avant la livraison, que $\bar{\beta}_i$ litres en moyenne, alors ce même patron se répétera tout au long de l'année à venir (s'il n'y a pas pénurie).

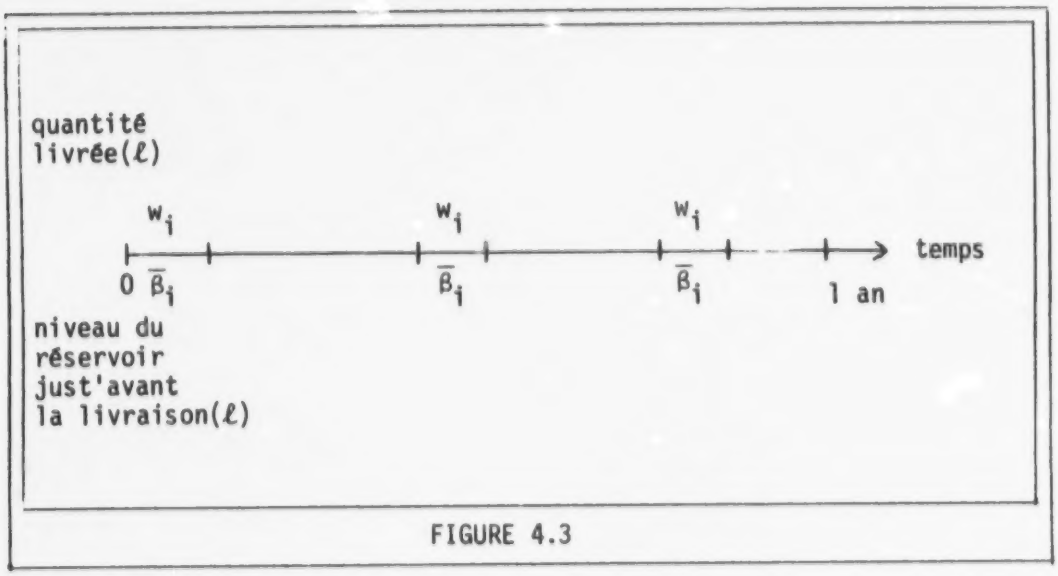
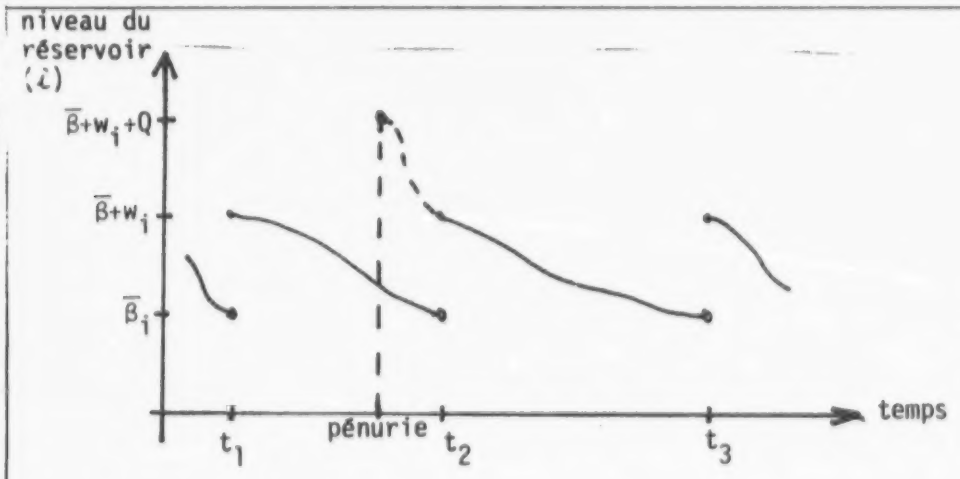


FIGURE 4.3

Nous ajoutons également deux hypothèses simplificatrices concernant la pénurie:

- entre deux moments consécutifs de livraison normale prévue, de w_i, il survient au plus une pénurie;
- lorsqu'une pénurie survient, le réservoir est rempli (et dans certains cas cela est un "suremplissage") de telle sorte qu'au moment

de la prochaine livraison normale prévue originalement, le niveau du réservoir sera de $\overline{\beta}_i+w_i$ litres, tout comme cela l'aurait été s'il n'y avait pas eu pénurie et qu'une livraison normale de w_i avait eu lieu ce même jour. Le tout est illustré à la figure 4.4.



t_i , i = 1,2,3 sont les moments de livraison normale prévus originalement. $\overline{\beta}_i+w_i+Q$ peut ou non être supérieur à r_i . Le trait plein ——— indique le niveau du réservoir en moyenne, i.e. selon une consommation toujours égale à μ_i ℓ/DJ . Le trait pointillé ----- indique le niveau entre le moment de pénurie et le prochain moment de livraison normale prévu originalement.

FIGURE 4.4

Nous obtenons $A\mu_i/w_i$ périodes de livraison normale semblables et indépendantes. Au cours de chacune d'elles, ou bien il survient une pénurie le jour 1, ou bien il survient une pénurie le jour 2,..., ou bien

il survient une pénurie le jour précédant celui de la livraison normale prévue, ou bien il n'y a pas de pénurie et une livraison normale est complétée le jour prévu (tous les ou étant exclusifs). Au total il y a exactement une livraison par période. On suppose également, comme précédemment, que le risque de pénurie est le même d'une période à l'autre et égal à celui de la première des $A\mu_i/w_i$ périodes, i.e. $\sum_{j=0}^{k-1} \overline{P}_{ij}(w_i)$ où k est le premier jour tel que $\mu_i \sum^{k-1} DJ_j < w_i \leq \mu_i \sum^{k} DJ_j$.

Soit

$EC_i(w_i)$ = espérance du coût annuel pour le client i si l'on planifie une livraison normale de w_i dès que le réservoir atteint en moyenne $\overline{\beta}_i$ litres.

On s'en doute, $EC_i(w_i)$ sera bien semblable au EC_{ik} de (4.18).

$$EC_i(w_i) = A\mu_i/w_i[K_i \sum_{j=0}^{k-1} \overline{P}_{ij}(w_i)+CT_i(1-\sum_{j=0}^{k-1} \overline{P}_{ij}(w_i))]$$

$$= A\mu_i/w_i[K_i(1-\overline{F}_{ik-1}(w_i)+CT_i\ \overline{F}_{ik-1}(w_i)] \quad \text{par (4.5)}$$

$$= A\mu_i/w_i[K_i+(CT_i-K_i)\overline{F}_{ik-1}(w_i)] .$$

Nous aimerions que cette fonction soit strictement convexe. Elle n'est malheureusement même pas continue! Pour $DJ_{j_o} > 0$, en effet,

$$\lim_{w_i \to (\mu_i \sum_{j}^{j_o} DJ_j)^-} EC_i(w_i) = \frac{A\mu_i}{\mu_i \sum_{j}^{j_o} DJ_j} [K_i+(CT_i-K_i)Pr[z \leq \frac{\bar{\beta}_i+\mu_i \sum_{j}^{j_o} DJ_j-\mu_i \sum_{j}^{j_o-1} DJ_j}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{j_o-1} DJ_j^2}}]]$$

et

$$\lim_{w_i \to (\mu_i \sum_{j}^{j_o} DJ_j)^+} EC_i(w_i) = \frac{A\mu_i}{\mu_i \sum_{j}^{j_o} DJ_j} [K_i+(CT_i-K_i)Pr[z \leq \frac{\bar{\beta}_i+\mu_i \sum_{j}^{j_o} DJ_j-\mu_i \sum_{j}^{j_o} DJ_j}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{j_o} DJ_j^2}}]]$$

où $Z : N(0,1)$. Or

$$\frac{\bar{\beta}_i+\mu_i \sum_{j}^{j_o} DJ_j-\mu_i \sum_{j}^{j_o-1} DJ_j}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{j_o-1} DJ_j^2}} = \frac{\bar{\beta}_i+\mu_i DJ_{j_o}}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{j_o-1} DJ_j^2}} > \frac{\bar{\beta}_i}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{j_o} DJ_j^2}} = \frac{\bar{\beta}_i+\mu_i \sum_{j}^{j_o} DJ_j-\mu_i \sum_{j}^{j_o} DJ_j}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{j_o} DJ_j^2}}$$

et conséquemment

$$\lim_{w_i \to (\mu_i \sum_{j}^{j_o} DJ_j)^-} EC_i(w_i) < \lim_{w_i \to (\mu_i \sum_{j}^{j_o} DJ_j)^+} EC(w_i) \quad \text{car} \quad CT_i-K_i < 0 .$$

En revanche, $EC_i(w_i)$ est continue et strictement convexe dans chacun des intervalles $(\mu_i \sum_{j}^{j_o-1} DJ_j , \mu_i \sum_{j}^{j_o} DJ_j)$ $j_o = 1,\ldots,M_i$. En effet, $EC_i(w_i)$ y est trivialement continue(voir la définition de $EC_i(w_i)$) et de plus,

$$EC_i'(w_i) = A\mu_i/w_i^2[w_i(CT_i-K_i)\bar{F}'_{ik-1}(w_i)-(K_i+(CT_i-K_i)\bar{F}_{ik-1}(w_i))]$$

$$EC_i''(w_i) = A\mu_i/w_i^4\{[(CT_i-K_i)(\bar{F}'_{ik-1}(w_i)+w_i\bar{F}''_{ik-1}(w_i))-(CT_i-K_i)\bar{F}'_{ik-1}(w_i)]w_i^2$$

$$-2w_i[w_i(CT_i-K_i)\bar{F}'_{ik-1}(w_i)-(K_i+(CT_i-K_i)\bar{F}_{ik-1}(w_i))]\}$$

$$= A\mu_i/w_i^3[(CT_i-K_i)w_i^2\bar{F}''_{ik-1}(w_i)-2(CT_i-K_i)w_i\bar{F}'_{ik-1}(w_i)$$

$$+2(K_i+(CT_i-K_i)\bar{F}_{ik-1}(w_i))] .$$

Or $w_i > \mu_i \sum^{k-1} DJ_j \Rightarrow w_i > \mu_i \sum^{k-1} DJ_j - \bar{\beta}_i \Rightarrow \bar{F}''_{ik-1}(w_i) < 0$ par (4.7), et $CT_i-K_i < 0 \Rightarrow (CT_i-K_i)w_i^2\bar{F}''_{ik-1} > 0$. Par (4.6) $\bar{F}'_{ik-1}(w_i) > 0$ et donc $-2(CT_i-K_i)w_i\bar{F}'_{ik-1}(w_i) > 0$.

Finalement

$$\bar{F}_{ik-1}(w_i) \in [0,1] \Rightarrow 2[K_i+(CT_i-K_i)\bar{F}_{ik-1}(w_i)] = 2[K_i(1-\bar{F}_{ik-1}(w_i))$$

$$+CT_i\bar{F}_{ik-1}(w_i)] > 0$$

et puisque $A>0$ on a bien $EC''_i(w_i)>0$, et donc $EC_i(w_i)$ est strictement convexe sur chaque intervalle $(\mu_i \sum^{j_o-1} DJ_j, \mu_i \sum^{j_o} DJ_j), j_o=1,\ldots,\mu_i$ ([1], Théorème 3.3.8, p. 93).

De plus $EC'_i(w_i) < 0$, pour tout $w_i > 0$, car par (4.6), $\bar{F}'_{ik-1}(w_i) > 0$ et donc $w_i(CT_i-K_i)\bar{F}'_{ik-1}(w_i) < 0$, et puisque $\bar{F}_{ik-1}(w_i) \in [0,1]$, alors $K_i+(CT_i-K_i)\bar{F}_{ik-1}(w_i) = K_i(1-\bar{F}_{ik-1}(w_i))$ $+CT_i\bar{F}_{ik-1}(w_i) > 0$ et donc $-[K_i+(CT_i-K_i)\bar{F}_{ik-1}(w_i)] < 0$.

On a maintenant une meilleure idée de l'allure de EC_i :

- EC_i est discontinue en $w_i = \mu_i \sum^{j_o} DJ_j$, $j_o = 1,\ldots,M_i$ et en ces points $\lim_{w_i \to (\mu_i \sum^{j_o} DJ_j)^-} EC_i(w_i) < \lim_{w_i \to (\mu_i \sum^{j_o} DJ_j)^+} EC_i(w_i)$,

- sur chaque intervalle $(\mu_i \sum_{j=1}^{j_o-1} DJ_j , \mu_i \sum_{j=1}^{j_o} DJ_j)$, $EC_i(w_i)$ est strictement convexe et strictement décroissante

$EC_i(w_i)$ a donc l'allure suivante:

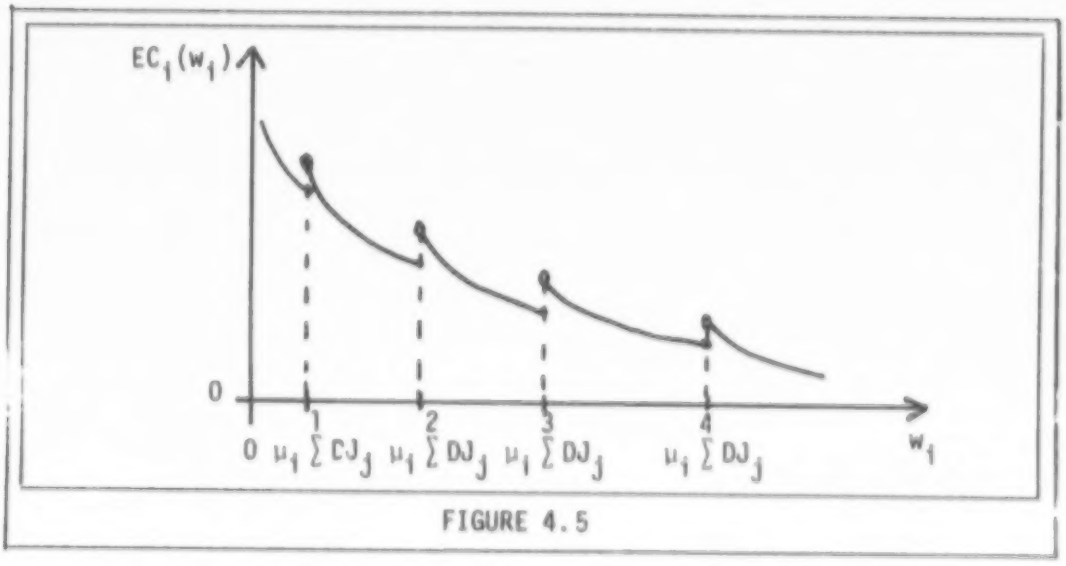


FIGURE 4.5

Une façon évidente d'éliminer les problèmes de discontinuité, tout au moins, est de remplacer $\mu_i \sum_{j=1}^{k-1} DJ_j$ par w_i . Cela signifie que la visite du client est complétée à l'instant précis où son réservoir atteint $\overline{\beta}_i$ et non plus seulement à midi le jour où cela se produit. De plus, il y a pénurie le jour k si le client manque de mazout avant la livraison, alors que précédemment nous avions implicitement supposé qu'il n'y avait pas pénurie et donc pas de pénalité puisque la livraison était imminente. On obtient:

$$EC_i(w_i) = A\mu_i/w_i[K_i+(CT_i-K_i)F_{N(0,1)}(\frac{\overline{B}_i}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{k-1} DJ_j^2+S^2DJ_k^2}})] \qquad (4.20)$$

$$= A\mu_i/w_i[K_i+(CT_i-K_i)\overline{\overline{F}}_{ik}(w_i)] \quad \text{par (4.8) et (4.9)}$$

où

$$w_i = \mu_i(\sum_{j}^{k-1} DJ_j+S\ DJ_k)$$

$EC_i(w_i)$ devient continue, mais qu'en est-il de sa convexité?

$$EC_i'(w_i) = A\mu_i/w_i^2[w_i(CT_i-K_i)\overline{\overline{F}}'_{ik}(w_i)-(K_i+(CT_i-K_i)\overline{\overline{F}}_{ik}(w_i))]$$

$$EC_i''(w_i) = A\mu_i/w_i^4(w_i^2[(CT_i-K_i)(\overline{\overline{F}}'_{ik}(w_i)+w_i\overline{\overline{F}}''_{ik}(w_i))-(CT_i-K_i)\overline{\overline{F}}'_{ik}(w_i)]$$

$$-2w_i[w_i(CT_i-K_i)\overline{\overline{F}}'_{ik}(w_i)-(K_i+(CT_i-K_i)\overline{\overline{F}}_{ik}(w_i)])$$

$$= A\mu_i/w_i^3((CT_i-K_i)w_i^2\overline{\overline{F}}''_{ik}(w_i)-2(CT_i-K_i)w_i\overline{\overline{F}}'_{ik}(w_i)$$

$$+2(K_i+(CT_i-K_i)\overline{\overline{F}}_{ik}(w_i))) .$$

Une condition nécessaire et suffisante pour la convexité de EC_{ik} est $EC_i''(w_i) \geq 0$. Se référant à (4.12) et (4.13) nous avons

$$EC_{ik}''(w_i) \geq 0$$

ssi

$$(CT_i-K_i)w_i^2 \frac{e^{-\frac{\bar{\bar{B}}_{ik}^2(w_i)}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \{\bar{\bar{B}}''_{ik}(w_i)-\bar{\bar{B}}_{ik}(w_i)(\bar{\bar{B}}'_{ik}(w_i))^2\}$$

$$-2(CT_i-K_i)w_i \frac{e^{-\frac{\bar{\bar{B}}_{ik}^2(w_i)}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \bar{\bar{B}}'_{ik}(w_i)+2(K_i+(CT_i-K_i)\bar{\bar{F}}_{ik}(w_i))$$

$$\geq 0$$

ssi

$$(CT_i-K_i)w_i \frac{e^{-\frac{\bar{\bar{B}}_{ik}^2(w_i)}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\{w_i(\bar{\bar{B}}''_{ik}(w_i)-\bar{\bar{B}}_{ik}(w_i)(\bar{\bar{B}}'_{ik}(w_i))^2)-2\bar{\bar{B}}'_{ik}(w_i)\}}_{AA}$$

$$+2(K_i+(CT_i-K_i)\bar{\bar{F}}_{ik}(w_i)) \geq 0$$

où

$$AA = w_i\left[\frac{-\bar{\beta}_i}{\sigma\mu_i^2 B^{3/2}}\left(1-\frac{3(SDJ_k)^2}{B}\right)-\frac{\bar{\beta}_i}{\sigma B^{1/2}}\left(\frac{-\bar{\beta}_i}{\sigma\mu_i}\frac{SDJ_k}{B^{3/2}}\right)^2\right]+\frac{2\bar{\beta}_i}{\sigma\mu_i}\frac{SDJ_k}{B^{3/2}} \quad \text{par (4.10)-(4.11)}$$

où

$$B = \sum^{k-1} DJ_j^2+(SDJ_k)^2$$

$$= \frac{\bar{\beta}_i}{\sigma\mu_i B^{3/2}}\left\{w_i\left[-\frac{1}{\mu_i}\left(1-\frac{3(SDJ_k)^2}{B}\right)-\mu_i B\frac{\bar{\beta}_i^2(SDJ_k)^2}{\sigma^2\mu_i^2 B^3}\right]+2SDJ_k\right\}$$

$$= \frac{\bar{\beta}_i}{\sigma\mu_i B^{3/2}}\left\{\frac{3w_i(SDJ_k)^2}{\mu_i B}-\frac{w_i}{\mu_i}-\frac{\bar{\beta}_i^2 w_i}{\sigma^2\mu_i}\frac{(SDJ_k)^2}{B^2}+2SDJ_k\right\}$$

$$= \frac{\bar{\beta}_i}{\sigma\mu_i B^{3/2}} \{\frac{w_i}{\mu_i}[\frac{(SDJ_k)^2}{B}\ (3 - \frac{\bar{\beta}_i^2}{\sigma^2 B}) - 1] + 2SDJ_k\}$$

où

$SC_i \le \bar{\beta}_i \le r_i$ par définition de $SC_i, \bar{\beta}_i$ et r_i ,

$\sigma = 0.20$ fut fixé à cette valeur

$0.5 \le \mu_i \le 2.50$ la simulation a fourni ces résultats

$0 < w_i \le r_i - \bar{\beta}_i$ par définition de $w_i, r_i, \bar{\beta}_i$ (l'examen de $w_i = 0$ est remis à plus tard)

$0 \le S \le 1$ par définition de S

$0 \le DJ \le 50$ nos données satisfont ces inégalités.

A partir de ces caractéristiques on peut certes imaginer des combinaisons engendrant $AA > 0$. Par exemple, si $\bar{\beta}_i$ est très petit, $S = 1$, DJ_k est grand et w_i est petit de sorte que k est petit et que $(SDJ_k)^2/B$ soit le plus grand possible, alors $AA > 0$, et, peut être même $EC_i''(w_i) < 0$. Bien que nous n'ayons pas poussé plus loin la recherche, le nombre de ces cas défavorables est probablement assez restreint pour s'en accomoder. Mais même en supposant EC_i convexe dans chaque intervalle $(\mu_i \sum_{}^{k-1} DJ_j$, $\mu_i \sum_{}^{k} DJ_j)$, un problème demeure aux extrémités. En raison de la discontinuité de $\bar{\bar{B}}'_{ik}$ (voir la section 4.1) on a:

$$\lim_{w_i \to (\mu_i \sum_{k}^{k} DJ_j)^-} EC_i'(w_i) = A\mu_i/\bar{w}^2[\bar{w}(CT_i-K_i)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\bar{B}_{ik}^2(\bar{w})}{2}}(\frac{-\bar{\beta}_i}{\sigma\mu_i}\frac{DJ_k}{(\sum_{k} DJ_j^2)^{3/2}})$$

$$-(K_i+(CT_i-K_i)\bar{\bar{F}}_{ik}(\bar{w}))]$$

et

$$\lim_{w_i \to (\mu_i \sum_{k}^{k} DJ_j)^+} EC_i'(w_i) = A\mu_i/\bar{w}^2[\bar{w}(CT_i-K_i)\times 0 - (K_i+(CT_i-K_i)\bar{\bar{F}}_{ik}(\bar{w}))] ,$$

$$\text{où } \bar{w} = \mu_i \sum_{k}^{k} DJ_j$$

donc

$$\lim_{w_i \to (\mu_i \sum_{k}^{k} DJ_j)^-} EC'_i(w_i) > \lim_{w_i \to (\mu_i \sum_{k}^{k} DJ_j)^+} EC_i'(w_i)$$

EC_i a donc au mieux l'allure suivante:

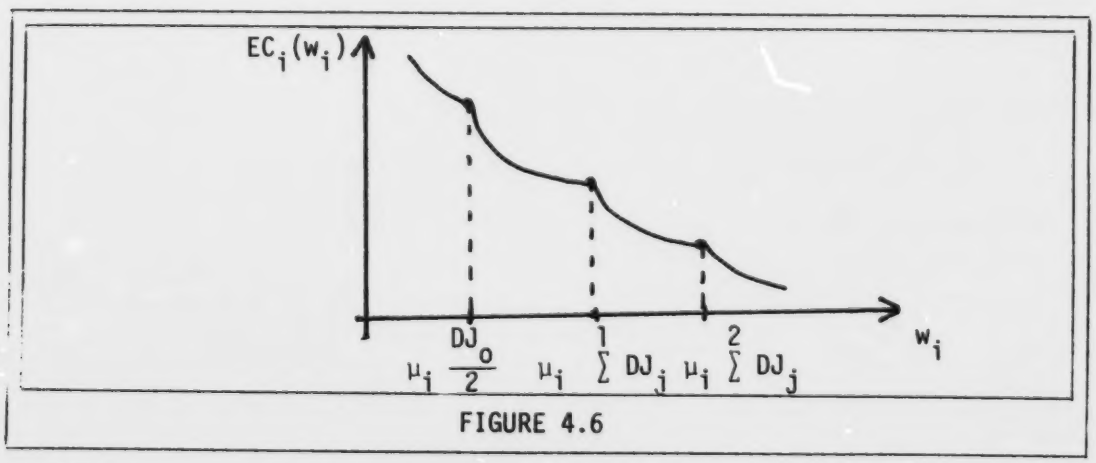


FIGURE 4.6

et peut-être celle-ci, car le signe de EC_i' n'est pas trivialement négatif

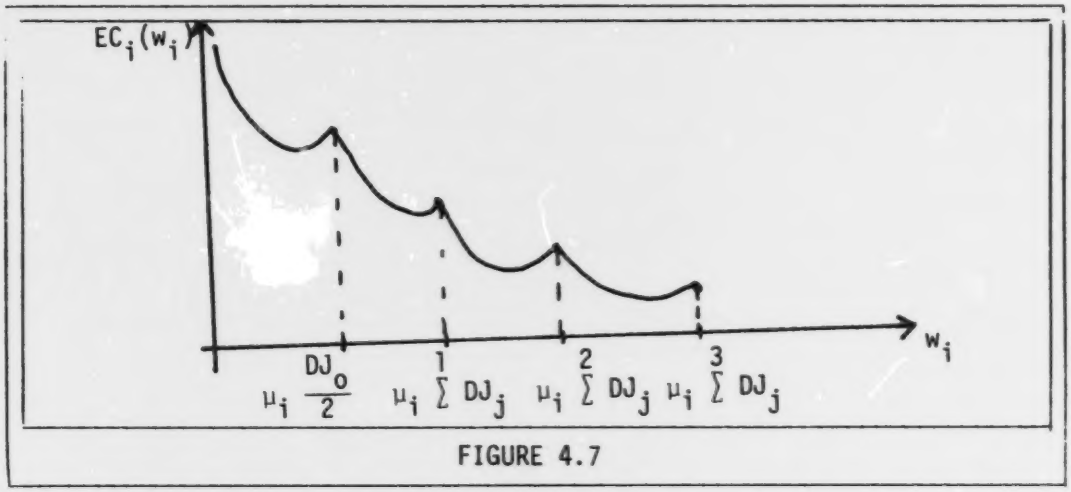


FIGURE 4.7

C'est pour ces raisons que nous n'avons pas opté pour cette version de EC_i .

IV.3.2 *La version finale*

Jusqu'à maintenant, les voies les plus naturelles de définition de EC_i ne nous ont pas permis d'obtenir une fonction adéquate. En effet, dans certains cas nous avons des discontinuités et aucune de ces fonctions n'est convexe sur tout le domaine de définition $(0, r_i - \bar{\beta}_i]$. Plusieurs autres tentatives aussi infructueuses, certaines s'éloignant sensiblement des approches présentées jusqu'ici, nous ont au moins permis d'analyser le concept de convexité recherché ici. La formulation qui suit est adéquate et ne s'éloigne pas trop du concept des précédentes.

Lors de l'étude de la version où $EC_i(w_i) = A\mu_i/w_i[K_i+(CT_i-K)\overline{F}_{ik}(w_i)]$, la preuve de convexité sur $(\mu_i \sum_{}^{k-1} DJ_j , \mu_i \sum_{}^{k} DJ_j)$ était facilitée par le fait que le dénominateur de $\overline{B}_{ik}(w_i)$ était indépendant de w_i . Cette observation a dirigé nos efforts vers la formulation suivante:

$$EC_i(w_i) = A\mu_i/w_i[K_iF_{ik}(w_i)+CT_i(1-F_{ik}(w_i))] \qquad (4.21)$$

EC_i est clairement continue pour $w_i > 0$ car F_{ik} l'est, et de classe C' car entre autre F_{ik} l'est. Vérifions maintenant que EC_i est strictement convexe dans la région qui nous intéresse. Nous examinerons ensuite si elle reflète bien les coûts annuels.

THÉORÈME 4.1: EC_i est strictement convexe pour $0 < w_i < r_i$.

PREUVE: Il suffit de montrer que $EC_i''(w_i) > 0$, pour $0 < w_i < r_i$

$$EC_i'(w_i) = A\mu_i/w_i^2[w_i(K_i-CT_i)F_{ik}'(w_i) - [CT_i+(K_i-CT_i)F_{ik}(w_i)]]$$

$$EC_i''(w_i) = A\mu_i/w_i^4\{w_i^2[(K_i-CT_i)(F_{ik}'(w_i)+w_iF_{ik}''(w_i))-(K_i-CT_i)F_{ik}'(w_i)]$$
$$-2w_i[w_iF_{ik}'(w_i)(K_i-CT_i)-(CT_i+(K_i-CT_i)F_{ik}(w_i))]\}$$

$$= A\mu_i/w_i^3\{w_i^2(K_i-CT_i)F_{ik}''(w_i)-2w_i(K_i-CT_i)F_{ik}'(w_i)$$
$$+2(CT_i+(K_i-CT_i)F_{ik}(w_i))\} .$$

Donc

$$EC_i''(w_i) > 0 \quad \text{ssi} \quad (K_i - CT_i)\{w_i^2 F_{ik}''(w_i) - 2w_i F_{ik}'(w_i) + 2F_{ik}(w_i)\} + 2CT_i > 0 .$$

$$> 0 \qquad\qquad G(w) \qquad\qquad > 0$$

Puisque $K_i > CT_i$ et que $CT_i > 0$, la condition sera vérifiée si

$$G(w) = w^2 F_{ik}''(w) - 2wF_{ik}'(w) + 2F_{ik}(w) \geq 0 .$$

Or

$$G'(w) = w^2 F_{ik}'''(w) + 2wF_{ik}''(w) - 2[F_{ik}'(w)\ wF_{ik}''(w)] + 2F_{ik}'(w)$$

$$= w^2 F_{ik}'''(w) \qquad (4.22)$$

et il s'ensuit que $G'(w)$ et $F_{ik}'''(w)$ sont de même signe. Par (4.16),

$$F_{ik}'''(w) = D(w)\left[\left(\frac{w - r_i - 25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2 - 1\right] \qquad (4.23)$$

où

$$D(w) = \frac{e^{-\frac{B_{ik}^2}{2}(w)}}{\sqrt{2\pi}\left(\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}\right)^3} > 0 .$$

<u>Si</u> $\left(\frac{r_i - r_i - 25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2 - 1 \geq 0$ alors $F_{ik}'''(w) \geq 0$ sur tout $(0, r_i)$ et $G'(w)$ aussi. Donc G est partout croissant, et puisque $G(0) > 0$, alors $G(w) > 0$ sur $(0, r_i)$ et $EC_i''(w) > 0$.

<u>Sinon</u> $\left(\frac{r_i - r_i - 25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2 < 1 .$ (4.24)

D'autre part,

$$\left(\frac{0-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2 > 1 \quad \text{ssi} \quad r_i+25 > 0.2\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2} \quad \text{car} \quad \sigma = 0.2$$

$$\text{si} \quad \left(\frac{934}{0.2}\right)^2 > \sum_{j}^{J_i} DJ_j^2 \quad \text{car} \quad r_i \geq 909\ell$$

$$\text{si} \quad 21{,}808{,}900 > \sum_{j}^{J_i} DJ_j^2$$

or, cette dernière condition est largement vérifiée, puisque selon nos données et la valeur de J_i (dont on discutera plus loin), $\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2$ ne dépasse jamais 100,000, peu importe r_i. Donc

$$\left(\frac{0-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2 > 1 . \qquad (4.25)$$

Par (4.24) et (4.25), il existe $w_o \in (0,r_i)$ tel que

$$\left(\frac{w_o-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2 = 1 .$$

Nous décomposons maintenant l'analyse de G sur $(0,r_i)$, en deux parties:

1er cas: $w \in (0,w_o]$

Dans ce cas $F'''_{ik}(w) \geq 0$, par définition de w_o et (4.23)-(4.25) et $G'(w) \geq 0$ par (4.22). G est croissante sur $(0,w_o)$. Puisqu'en plus G est continue et que $G(0) = 2F_{ik} \geq 0$, alors $G(w) \geq 0$ pour tout $w \in (0,w_o]$.

2ième cas: $w \in [w_0, r_i]$

Déterminons d'abord l'intervalle où G est concave. Une condition nécessaire et suffisante pour que G soit concave est $G''(w) \leq 0$ pour tout w dans l'intervalle.

Or $G''(w) \leq 0$ ssi $w^2 F'''_{ik}(w) + 2wF''_{ik}(w) \leq 0$, par (4.22) ssi

$$w^2 \left\{ \frac{e^{-\frac{B_{ik}^2(w)}{2}}}{\sqrt{2\pi}\left(\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}\right)^3} \left(\frac{-2B_{ik}(w)}{2} B'_{ik}(w)\right) \left[\left(\frac{w-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2 - 1\right] \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\frac{B_{ik}^2(w)}{2}}}{\sqrt{2\pi}\left(\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}\right)^3} \times 2 \times \left(\frac{w-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right) \times \frac{1}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}} \right\}$$

$$+ 2wD(w) \times \left[\left(\frac{w-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2 - 1\right] \leq 0 \text{ , par (4.23)}$$

ssi

$$w^2 D(w) \left\{ \frac{-1}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}} \left(\frac{w-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right) \times \left[\left(\frac{w-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2 - 1\right] + \frac{2}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}} \left(\frac{w-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right) \right\}$$

$$+ 2wD(w) \left[\left(\frac{w-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2 - 1\right] \leq 0$$

ssi

$$\frac{w}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}} \times \left(\frac{w-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)\left\{-\left(\frac{w-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2+1+2\right\} + 2\left[\left(\frac{w-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2-1\right]$$

$$\leq 0 \text{ , car } wD(w) \geq 0 \text{ pour tout } w \geq 0$$

ssi

$$M(w) \triangleq \frac{-w}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\left(\frac{w-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^3 + 2\left(\frac{w-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2 + \frac{3w}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\left(\frac{w-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right) - 2 \leq 0$$

ssi

$$K(w) \triangleq (w-r_i-25)\underbrace{\left\{\frac{-w}{\left(\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}\right)^2} \times (w-r_i-25)^2 + 2(w-r_i-25) + 3w\right\}}$$

$$= H(w)$$

$$\leq 2\left(\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}\right)^2 \quad . \tag{4.26}$$

<u>Si $H(w) \geq 0$</u> , puisque $(w-r_i-25) < 0$ pour $w \in [w_0, r_i]$ alors (4.26) est trivialement vérifié.

<u>Sinon</u>,

$$K'(w) = 1 \times H(w)+(w-r_i-25)H'(w) \quad . \tag{4.27}$$

Mais

$$H'(w) = 5 - \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{\sum^{J_i} DJ_j^2}\right)^2}\left[(w-r_i-25)^2+2w(w-r_i-25)\right]$$

$$= 5 - \frac{(w-r_i-25)(3w-r_i-25)}{\left(\sigma\sqrt{\sum^{J_i} DJ_j^2}\right)^2}$$

et pour

$$w \in \left[\frac{r_i+25}{3}, r_i+25\right] , \; H'(w) \geq 5 > 0 . \qquad (4.28)$$

Par conséquent, si $H(w) < 0$ et que $w \in \left[\frac{r_i+25}{3}, r_i+25\right]$ alors $(w-r_i-25) \leq 0$, $H'(w) > 0$ et donc $K'(w) < 0$, par (4.27).

Nous allons maintenant montrer que

i) $w_o \in \left[\frac{r_i+25}{3}, r_i+25\right]$

ii) $K(w_o) \leq 2\left(\sigma\sqrt{\sum^{J_i} DJ_j^2}\right)^2$

et alors (4.26) sera vérifié pour $w \in [w_o, r_i]$. En effet, par i) et (4.28), nous aurons H strictement croissante sur l'intervalle $[w_o, r_i]$. Si $H(w_o) \geq 0$ alors $H(w) \geq 0$ pour tout $w \in [w_o, r_i]$ et (4.26) est trivialement vérifié car $(w-r_i-25) < 0$. Si $H(w_o) < 0$ alors par (4.27) et i) K est décroissante sur l'intervalle $[w_o, \text{Min}(r_i, \bar{w})]$ où $\bar{w}$ est tel que $H(\bar{w}) = 0$ et atteint sa valeur maximale pour $w = w_o$. Or par ii) cette valeur respecte (4.26) et donc (4.26) est vérifié par $w \in [w_o, r_i[$.

PREUVE de i): Par (4.24) et (4.25), et puisque $\left(\frac{w-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2$ est décroissante sur $[0, r_i+25]$, il suffit de montrer que

$$\left(\frac{\frac{r_i+25}{3} - r_i - 25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2 > 1 ;$$

or

$$\left(\frac{\frac{r_i+25}{3} - r_i - 25}{\sigma\sqrt{\sum^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2 > 1$$

ssi

$$\left(\frac{\frac{2}{3}(r_i+25)}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2 > 1$$

ssi

$$\left(\frac{2}{3}\,\frac{(r_i+25)}{\sigma}\right)^2 > \sum^{J_i} DJ_j^2$$

ssi

$$9{,}692{,}844 = \left(\frac{2}{3} \times \frac{934}{.2}\right)^2 > \sum^{J_i} DJ_j^2 \quad \text{car} \quad r_i \geq 909$$

et cette dernière inégalité est vérifiée puisque $\sum_{j=1}^{J_i} DJ_j^2$ ne dépasse jamais 100,000 , pouet importe r_i .

PREUVE de ii): Par définition,

$$\left(\frac{w_o - r_i - 25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)^2 = 1 \qquad (4.29)$$

et $K(w_o) \leq 2\left(\sigma\sqrt{\sum^{J_i} DJ_j^2}\right)^2$ ssi $M(w_o) \leq 0$

ssi

$$\frac{w_o}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}} + 2 \times 1 + \frac{3w_o}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}} \times (-1) - 2 \leq 0 ,$$

par (4.29) et la définition de M(w)

ssi

$$\frac{w_o}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}} \leq \frac{3w_o}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}$$

ce qui est vérifié puisque $w_o \geq 0$.

Pour conclure que G est non négative sur $[w_o, r_i]$, il suffit maintenant de montrer que $G(w_o) \geq 0$ et $G(r_i) \geq 0$. En effet, par définition de G concave, nous aurons alors que si $w = \theta w_o + (1-\theta) r_i$, $\theta \in [0,1]$, alors $G(w) \geq \theta G(w_o) + (1-\theta) G(r_i) \geq 0$.

Or $G(w_o) \geq 0$ par le premier cas. Quant à $G(r_i)$,

$$G(r_i) = r_i^2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{B_{ik}^2(r_i)}{2}} \times \frac{25}{(\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2})^3} - \frac{2r_i}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{B_{ik}^2(r_i)}{2}} \times \frac{1}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}} + 2F_{N(0,1)}\left(\frac{-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{e^{-\frac{B_{ik}^2(r_i)}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{r_i}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}} \left[\frac{25r_i}{(\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2})^2} - 2\right]}_{>0} + \underbrace{2F_{N(0,1)}\left(\frac{-25}{\sigma\sqrt{\sum_{j}^{J_i} DJ_j^2}}\right)}_{>0}$$

où

$$\frac{25r_i}{(\sigma\sqrt{\sum^{J_i} DJ_j^2})^2} - 2 \geq 0 \quad \text{ssi} \quad r_i > \frac{2 \times 0.04}{25} \sum^{J_i} DJ_j^2 \quad \text{car} \quad \sigma = 0.20$$

$$\text{ssi} \quad 312.5r_i > \sum^{J_i} DJ_j^2 .$$

Pour $r_i = 909\,\ell$, cela est vérifié si $\sum^{J_i} DJ_j^2 < 284{,}062.5$ ce qui est amplement réalisé puisque selon nos données sur les degrés-jour, et la valeur de J_i dont on discutera plus loin $\sum^{J_i} DJ_j^2$ n'excède pas 100,000. Il en est de même pour les autres valeurs de r_i. Donc $G(r_i) \geq 0$, ce qui complète le deuxième cas et la preuve du théorème.

Caractéristiques de EC_i et calcul de J_i

La version précédente, définie par (4.20) collait bien à la réalité. Des problèmes de convexité nous ont obligé à l'écarter. Dans la version finale de (4.21), nous désirons nous approcher le plus possible de (4.20), tout en éliminant les désagréments causés par l'absence de convexité. Une façon d'y arriver serait de fixer J_i de telle sorte que $\bar{\bar{F}}_{ik}(w) = 1 - F_{ik}(w)$ pour les valeurs les plus courantes de w.

$$\bar{\bar{F}}_{ik}(w) = 1-F_{ik}(w) \quad \text{ssi} \quad F_{N(0,1)}\left(\frac{\bar{\beta}_i}{\sigma\sqrt{\sum^{k-1} DJ_j^2+S^2DJ_k^2}}\right) = 1-F_{N(0,1)}\left(\frac{w-r_i-25}{\sigma\sqrt{\sum^{J_i} DJ_j^2}}\right)$$

$$\text{ssi} \quad \frac{\bar{\beta}_i}{\sqrt{\sum^{k-1} DJ_j^2+S^2DJ_k^2}} = \frac{r_i+25-w}{\sqrt{\sum^{J_i} DJ_j^2}} \qquad (4.30)$$

où $w = \mu_i[\sum_{j=1}^{k-1} DJ_j + SDJ_k]$, $0 < S \leq 1$. Observons tout d'abord que dans (4.20), si w croît, alors $\sum_{j=1}^{k-1} DJ_j^2 + S^2 DJ_k^2$ croît et $\frac{\bar{\beta}_i}{\sigma\sqrt{\sum_{j=1}^{k-1} DJ_j^2 + SDJ_k^2}}$ décroît. De même, dans (4.21), si w croît alors $\frac{r_i + 25 - w}{\sigma\sqrt{\sum_{j=1}^{J_i} DJ_j^2}}$ décroît (nou- rappelons que J_i est indépendant de w), et ainsi les deux fonctions ont le même comportement vis-à-vis de w . Il est certain cependant que nous ne pourrons pas avoir l'égalité en (4.30) pour tout $w \in (0, r_i)$. Aussi, a-t-on choisi d'approcher l'égalité en (4.30) pour les valeurs les plus courantes de w , en l'occurence, celles correspondant à un remplissage presque complet du réservoir. J_i sera donc choisi de telle sorte qu'il y ait égalité en (4.30) pour $w = .90(r_i - \bar{\beta}_i)$ (le remplissage complet correspond à $w = r_i - \bar{\beta}_i$). Il y a égalité en (4.30) si

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{J_i} DJ_j^2} = \frac{r_i + 25 - .90(r_i - \bar{\beta}_i)}{\bar{\beta}_i} \times \sqrt{\sum_{j=1}^{k-1} DJ_j^2 + S^2 DJ_k^2}$$

$$= \frac{.1r_i + .9\bar{\beta}_i + 25}{\bar{\beta}_i} \times \sqrt{\sum_{j=1}^{k-1} DJ_j^2 + S^2 DJ_k^2}$$

où k et S sont tels que

$$w = .90(r_i - \bar{\beta}_i) = \mu_i\left(\sum_{j=1}^{k-1} DJ_j + SDJ_k\right) , \quad S \in (0,1] .$$

IV.4 LES COÛTS DE TRANSPORT ET LA DÉFINITION DE $EC_i(0)$

La définition de EC_i en (4.21) inclut à la fois la notion de risque de pénurie, représentée par le coût de pénalité K_i, et celle de coût de transport identifiée par CT_i. Pour évaluer K_i et CT_i nous reprenons les résultats de la section 3.3. En accord avec (3.1), $K_i = 1331.6\mu_i$ (le rôle de p est ici joué par $F_{ik}(w_i)$). Quant à CT_i, il doit exprimer le coût de transport pour chacune des $A\mu_i/w_i$ périodes. Selon le scénario décrit plus tôt ce coût est identique pour toutes les périodes et égal à celui de la prochaine livraison. A partir de l'estimé du coût de chaque kilomètre parcouru obtenu au chapitre III, soit 0.40$, le coût total de transport généré par la boucle b si D kilomètres y sont parcourus, est de 0.4D$. Nous avons choisi de répartir ce coût parmi les clients i de la boucle b au pro rata de leur distance du dépot. Le client i génère donc un coût

$$\text{dis(dépot,i)} \times \frac{0.4D}{\sum_{j \in b} \text{dis(dépot,j)}} . \qquad (4.31)$$

Nous avons également voulu tenir compte, dans la formulation de CT_i, du "détour" occasionné par la visite d'un client. Pour le client i ce détour est de

$$\text{détour}_i = \text{dis(pred(i),i)}+\text{dis(i,succ(i))}-\text{dis(pred(i),succ(i))} \qquad (4.32)$$

où

pred(i): client (ou dépot) précédent i sur la boucle b

succ(i): client (ou dépot) suivant i sur la boucle b .

Il représente la distance qui serait économisée par l'élimination du client i de la boucle b. L'expression finale de CT_i est maintenant obtenue en combinant (4.31) et (4.32)

$$CT_i = 0.4\left[\text{dis(dépot,i)} \times \frac{D}{\sum_{j \in b} \text{dis(dépot,j)}} + \text{détour}_i\right] . \qquad (4.33)$$

Le premier terme dans CT_i est dominant, l'ajout du détour n'étant là que pour favoriser l'insertion d'un client qui résulte en un plus petit détour possible.

En considérant un horizon de plusieurs jours, nous avons à décider s'il est préférable ou non de visiter le client le jour J ou plus tard (tout en ne dépassant pas le "meilleur jour" de livraison du client, qui survient avant le jour $J+5$). Nous devons donc associer un coût à l'alternative offerte par les autres jours que J. Ceci nous conduit au problème de la définition de $EC_i(0)$. Jusqu'ici, en effet, nous avons concentré notre attention sur EC_i pour $w_i > 0$. De fait, EC_i ne peut être défini en $w_i = 0$ en utilisant (4.21).

$EC_i(0)$ doit refléter le coût annuel pour le client i lorsqu'il n'est pas visité le jour J. Comme pour $w_i > 0$, nous devons faire une hypothèse sur le scénario de l'année à venir. Si le client i a été choisi à l'étape 1, c'est que son meilleur jour de livraison a lieu en $J+j_0$ pour un $j_0 \in \{0,1,2,3,4\}$. Pour $w_i = 0$, nous supposerons que le client i est visité dans les "meilleures circonstances possibles" d'ici (et incluant) le jour $J+j_0$. Le calcul de $EC_i(0)$ est le suivant:

Si $j_o = 0$, cela signifie que le jour J est le meilleur jour de livraison pour i . Nous devons le livrer maintenant. Nous posons donc $EC_i(0) = \infty$. Ceci forcera l'inclusion du client i sur une boucle du jour J , en autant que les contraintes de capacité et de temps permettent d'inclure tous les clients dans la même situation.

Sinon, nous répartissons d'abord les clients selon leur "meilleur jour" de livraison tel que défini plus tôt. Dénotons par N_j le nombre de clients ainsi obtenu pour le jour J+j , j = 0,1,...,4 . Si N_j est faible alors tous les clients y recevront la quantité maximale. Mais si N_j excède un certain seuil, dans notre simulation ce nombre était de 78 pour trois véhicules, alors un pourcentage de plus en plus grand du temps est consacré au transport et au temps fixe de livraison (CAFIXE et CAFIXO). On peut alors considérer que le nombre total de litres livrés dans une journée diminue linéairement pour atteindre environ 10% de la quantité maximale avec 98 clients. Au-delà de 100 clients, la quantité livrée est presque nulle.

Suite à ces considérations, introduisons la notation suivante, pour $j = 1,\ldots,j_o$

w_i^j : est la quantité maximale pouvant être livrée au client i le jour J+j mais ajustée par un facteur multiplicatif F_j pour tenir compte de l'achalandage de la journée. En accord avec ce qui précède F_j est défini comme suit:

$$F_j = \begin{cases} 1 & \text{si } N_j \leq 78 \\ \dfrac{99-N_j}{99-78} & \text{si } 78 < N_j < 98 \\ \dfrac{0.1}{\ell n(N_j-94.9)} & \text{si } N_j \geq 98 \ . \end{cases} \qquad (4.34)$$

(Remarque: La définition de F_j pour $N_j \geq 98$ évite que F_j et donc w_i^j deviennent nuls. La figure 4.9 représente F_j en fonction de N_j)

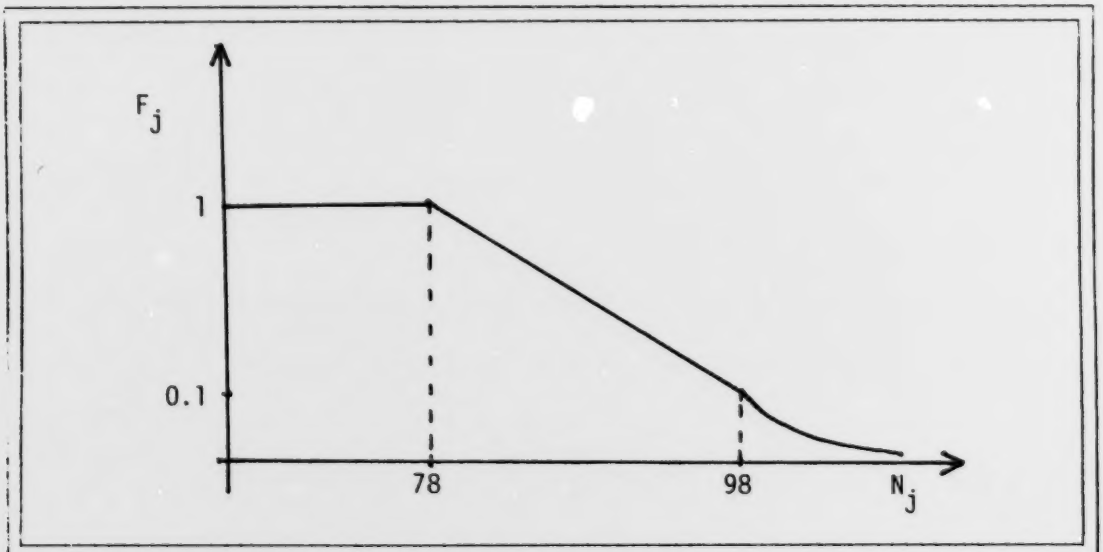


FIGURE 4.8

CT_i^j : est l'estimé du coût de transport encouru pour visiter le client i le jour J+j . Puisqu'aucune boucle du jour J+j n'est connue, il faut, pour utiliser (4.33) estimer D , $\sum_{j\in b}$ dis(dépot,j) et détour$_i$. Puisque le quotient D/ $\sum_{j\in b}$ dis(dépot,j) variait peu lors de nos simulations, nous optons pour une valeur moyenne de 0.45. Pour détour$_i$, nous l'avons estimé par la moyenne des

cinq(5) plus courts détours impliquant i parmi les clients partageant le même meilleur jour de livraison.

EC_i^j : est l'espérance du coût pour l'année à venir si nous livrons w_i^j litres au client i dès qu'il ne lui reste plus que $\bar{\beta}_i^j \triangleq \beta_i - \mu_i[\sum_{k=-nj_i}^{-1} DJ_k + \sum_{k=J}^{J+j-1} DJ_k + 0.5(DJ_{-nj_i-1} + DJ_{J+j})]$ et qu'à chaque occasion le coût de transport est de CT_i^j. Se référant à la relation (4.21), nous avons:

$$EC_i^j = \frac{A\mu_i}{w_i^j}\left[CT_i^j + (K_i - CT_i^j) F_{N(0,1)}\left(\frac{w_i^j - r_i - 25}{\sigma\sqrt{\sum_{}^{J_i} DJ_i^2}}\right)\right] \qquad (4.35)$$

où J_i dépend de $\bar{\beta}_i^j$.

Puisque $w_i = 0$ correspond à la meilleure alternative au jour J pour livrer, il devient naturel de poser

$$EC_i(0) = \min_{1 \le j \le j_o} \{EC_i^j\} . \qquad (4.36)$$

Un dernier point reste à préciser. Lorsque $N_{j'}$ est élevé, le jour j' est peu attrayant car on y livre de trop faibles quantités. Si nous conservons $N_{j'}$ fixe tout au long de la procédure de calcul des $EC_i(0)$ alors à la limite aucun client n'aura $EC_i(0) = EC_i^{j'}$ et aucun client ne sera visité le jour j', ce qui est exagéré. Seuls $N_{j'}-78$ clients sont susceptibles de ne pas recevoir la quantité maximale et ce n'est que ce nombre de clients qu'il est désirable de visiter un autre jour que le jour j'. Nous avons donc légèrement modifié la procédure de calcul de $EC_i(0)$ et de EC_i^j pour contourner ce problème. De plus cette amélioration tend à équilibrer la charge de travail de chaque jour.

Illustrons le principe avec un exemple. Supposons les effectifs suivants:

$$N_0 = 21 \ , \ N_1 = 62 \ , \ N_2 = 130 \ , \ N_3 = 54 \ , \ N_4 = 120 \ .$$

Puisque $\sum_{j=0}^{4} N_j = 387$ excède 200, nous ne conservons dans l'ensemble E que les effectifs $N_0' = 21$, $N_1' = 62$, $N_2' = 117$, $N_3' = 0$, $N_4' = 0$. Pour les fins du calcul de w_i^j , nous modifions la <u>valeur</u> de N_2' pour inclure tous les clients des jours subséquents de l'horizon ne pouvant recevoir une livraison maximale. Dans notre exemple les 42(=120-78) clients du jour J+4 ne peuvent recevoir une livraison maximale ce jour. Nous pouvons en déplacer 24(=78-54) le jour J+3 mais il en reste 18, qui sont ajoutés à N_2'. De même, les 13 clients de J+2 rejetés en raison de la limite du 200, sont ajoutés à N_2' , qui prend finalement la valeur 148(=117+18+13). Précisons que ce n'est que la <u>valeur</u> de N_2' qui change et nous continuons à ne conserver que 200 clients dans E .

En gonflant ainsi N_2' nous favorisons le déplacement de certains des 117 clients conservés du jour J+2 vers des jours antérieurs où il y a moins de congestion. De plus, lors du calcul de $EC_i(0)$, s'il s'avère, par exemple, que pour un client i de J+2 , $EC_i^1 = \min_{j = 1,2} EC_i^j$ alors nous modifions N_1' et N_2' pour rendre compte que le véritable meilleur jour de livraison de i n'est pas J+2 mais J+1 , et

$$N_1' \leftarrow N_1'+1$$

$$N_2' \leftarrow N_2'-1 \ .$$

En procédant ainsi, les premiers clients pour lesquels $EC_i(0)$ sera calculé,

se répartiront d'abord dans le jour J+1 où N'_1 y est faible au départ. Pour eux w_i^1 sera maximal. Ce faisant, N'_2 diminuera graduellement et il deviendra profitable de livrer un client le jour J+2 plutôt qu'en J+1. Au total, les clients se répartiront presqu'également entre J+1 et J+2 et le portrait final sera

$$N'_0 = 21 \ , \ N'_1 \cong 105 \ , \ N'_2 \cong 105 \ .$$

Lorsqu'ensuite nous aurons à juger de la pertinence de visiter un client i en J, si i fait partie de N'_1 par exemple, et qu'il fut l'un des premiers traités à l'étape précédente, alors w_i^1 est maximal et il y a peu d'intérêt à le servir en J, sauf si détour_i y est nettement inférieur par exemple. En revanche, si i fut traité vers la fin, alors lorsqu'il fut ajouté à J+1, N'_1 était élevé et donc w_i^1 faible. Pour lui, il y aura avantage à le visiter en J où il pourra recevoir une plus grande livraison. La répartition finale sera d'environ

$$N'_0 = 74 \ , \ N'_1 = 78 \ , \ N'_2 = 78 \ .$$

Cette procédure fort simple a donc pour effet de redistribuer les clients en excès et d'aplanir les journées de pointe.

Il reste, enfin, à analyser la continuité et la stricte convexité de EC_i en $w = 0$. Par (4.21), $\lim_{w \to 0^+} EC_i(w) = \infty$. Pour les clients i dont $mj_i = J$, nous avons posé $EC_i(0) = \infty$ et EC_i est continue et strictement convexe, même en $w = 0$. Mais pour les autres clients, $EC_i(0) < \infty$ et EC_i n'est ni continue, ni différentiable, ni convexe en $w = 0$! Deux cas sont alors possibles:

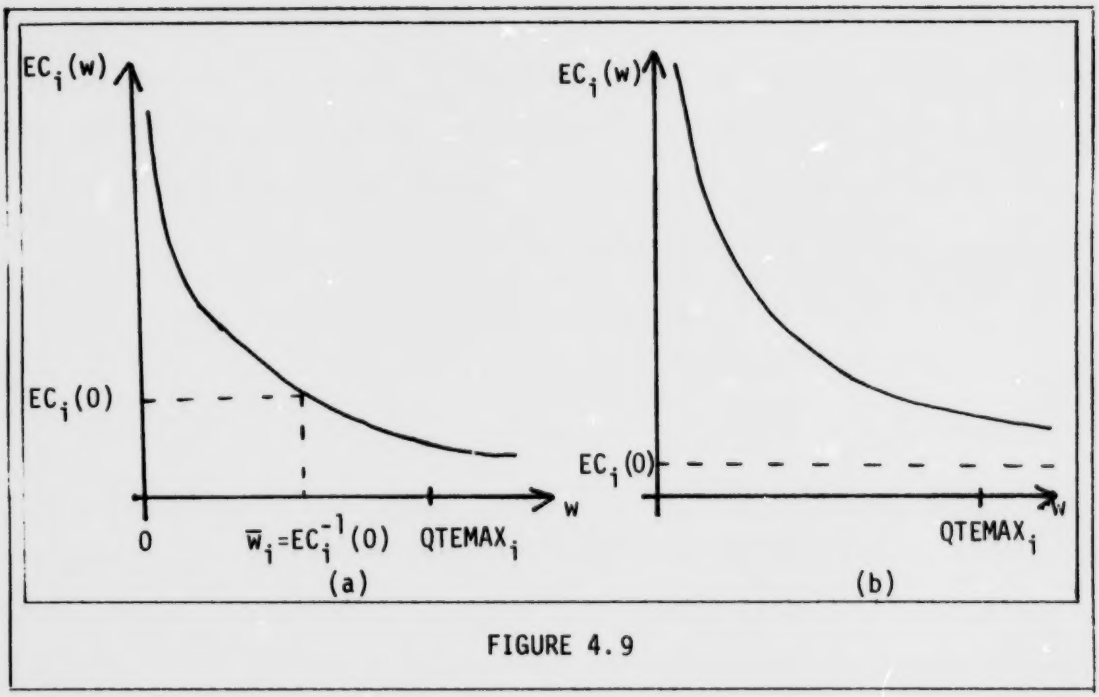


FIGURE 4.9

Dans le cas illustré en (a), une livraison le jour J n'est avantageuse par rapport aux possibilités offertes par J+j , $j = 1,\ldots,j_0$, que si $w \geq \bar{w}_i$. Par contre en (b) une livraison en J est désavantageuse, peu importe la quantité livrée. Pour contourner les problèmes de discontinuité et nonconvexité, nous pouvons restreindre le domaine de w à

$$w \in [\, \bar{w}_i, QTEMAX_i \,] \quad \text{en (a)}$$

$$w \in \{0\} \quad \text{en (b)}$$

(notons que $\bar{w}_i$ illustré à la figure 4.9 (a) change dès que CT_i^o est modifié car $EC_i(w)$ est affecté pour $w > 0$. Une mise à jour de $EC_i'(0)$, défini ci-après, devient alors nécessaire).

Nous avons préféré conserver le domaine convexe $[0,QTEMAX_i]$ pour le cas (a) et pour le cas (b). Comme nous le verrons au chapitre V, en pratique ce sont les dérivées $EC_i'(0)$ et $EC_i'(QTEMAX_i)$ qui déterminent réellement le domaine de définition de w. Nous serons alors en mesure de justifier que la définition suivante de $EC_i'(0)$ est adéquate:

$$EC_i'(0) \triangleq \begin{cases} EC_i'(\bar{w}_i) & \text{dans le cas de la figure 4.9 (a)} \\ EC_i'(QTEMAX_i+1) & \text{dans le cas de la figure 4.9 (b).} \end{cases}$$

Ce faisant, dans le premier cas, dès que $w < \bar{w}_i$ se présentera, nous aurons $EC_i'(w) < EC_i'(\bar{w}_i) \triangleq EC_i'(0)$, ($EC_i'$ est strictement croissante) et cela équivaudra à un w hors du domaine $[0,QTEMAX_i]$ et le choix de w sera rejeté. De même, dans le deuxième cas, $w > QTEMAX_i$ sera rejeté puisque $EC_i'(w) > EC_i'(QTEMAX_i)$.

CHAPITRE V

LA DEUXIÈME APPROCHE

V.1 INTRODUCTION

Si l'on passe en revue les solutions implantées dans l'entreprise privée, dans la littérature et dans notre première approche, elles ont toutes un point en commun: à chaque livraison, le réservoir est complètement rempli. Il ne faut pas s'en étonner. L'implantation et l'administration s'en trouvent simplifiées et le nombre annuel de visites limité. Dans la majorité des cas cette approche est satisfaisante. Mais que survienne une vague de froid ou un bris mécanique prolongé et ce beau système commence à avoir des ratés. La flotte de camions ne suffit plus à la tâche, ou si elle le fait, nous sommes en droit de nous demander si sa taille n'est pas trop importante pour répondre à la demande en temps normal.

Une autre circonstance, moins extrême celle-là, est la suivante: supposons que l'on doive remplir le réservoir de tout client visité et qu'une route ainsi construite visite n clients en 7h30 sur une journée possible de 8 heures. Nous supposons que la demi-heure inutilisée est insuffisante pour remplir aucun autre client. Supposons également que cette route passe devant un client (i.e. n'occasionnant aucun détour) qui n'est dans aucune route de cette journée. Si on permettait de petites livraisons

on ajouterait naturellement ce client à la route originale et on utiliserait la demi-heure de temps mort sans coût supplémentaire.

Au-delà de ces motivations se retrouve notre désir d'étudier deux (2) approches situées aux antipodes du développement. L'une simple et rapide avec peu de flexibilité et l'autre, sophistiquée et cherchant le plus de flexibilité possible. Armé de ces deux points de référence il devient plus facile de juger sous quels aspects la sophistication devient un gadget inutile et lourd et sous quels autres la simplicité manque de profondeur. Le défi ultime est de localiser ce juste milieu.

La liberté sur la quantité livrée n'est pas le seul aspect qui différencie nos deux (2) approches. Le processus de choix des clients décrit au chapitre précédent et les techniques de postoptimalité (utilisation du r-OPT plutôt que du 2-OPT) en sont d'autres.

V.2 L'ALGORITHME

Situons-nous le jour J-1 au soir, alors que toutes les informations sur les activités du jour J-1 nous sont connues et que nous sommes à planifier les opérations du jour J . L'algorithme procède comme suit:

Etape 1: le choix des clients

- choix de l'ensemble E des clients à l'intérieur duquel nous élaborerons les routes du jour J . Seuls ces clients peuvent être visités le jour J mais ils ne le seront pas nécessairement,

- déterminer la table des distances entre chaque paire de clients de E ,
- calcul de l'estimé de la quantité maximale pouvant être livrée à un client de E , i.e. la quantité nécessaire pour complètement remplir son réservoir s'il est visité.

Etape 2: partition initiale

- à l'aide d'une simplification de notre première approche, création d'une première partition réalisable où tous les clients visités voient leur réservoir rempli complètement. Seuls les clients dont le meilleur jour de livraison est J sont considérés,
- calcul du coût de transport CT_i^j pour le meilleur jour de chaque client et les jours précédants qui sont dans la période de planification.

Etape 3: amélioration de la solution initiale (cette étape est le coeur de l'algorithme)

- établissement de la première solution complète (i.e. avec les multiplicateurs) à partir de la partition issue de l'étape 2,
- tant que l'on peut améliorer la fonction économique, répéter les deux tâches suivantes:
  i) tenter d'insérer un par un des clients à la solution présente. On cesse lorsqu'il n'est plus possible d'améliorer la fonction économique par de tels ajouts.

ii) tenter d'améliorer par une technique de postoptimalité de type r-OPT qui procède à des échanges de clients intra et inter boucles.

En i) comme en ii) des estimés de l'impact de tels ajouts ou échanges guident le choix. Ces estimés sont calculés à partir des multiplicateurs optimaux.

Etape 4: mise à jour des fichiers

- calcul de la véritable quantité livrée à chaque client,
- pour chaque client visité, calcul
  - i) du prochain meilleur jour de livraison,
  - ii) du niveau du réservoir suite à cette dernière livraison,
  - iii) du nombre de jours depuis la dernière livraison, i.e. zéro(0),
- déterminer le niveau du réservoir de chaque client à la fin du jour J ,
- déterminer les clients en pénurie (s'il y a lieu) à la fin du jour J et simuler une livraison spéciale, avec les coûts et les changements de paramètres du client que cela occasionne.

V.3 FORMULATION DÉTAILLÉE, JUSTIFICATION ET IMPLANTATION INFORMATIQUE DE L'ALGORITHME

Dans cette section, nous reprenons chacune des quatre(4) grandes étapes de l'algorithme pour les détailler au niveau théorique. Lorsque

cela est moins évident, nous établissons le lien entre cette théorie et son implantation informatique.

V.3.1 *L'étape 1*

Le prochain meilleur jour de livraison est d'abord déterminé suivant la procédure décrite au chapitre IV. Avant même le début de la simulation ce calcul est fait pour tous les clients une fois pour toutes. Par la suite, il n'est repris à chaque jour de livraison, que pour les clients visités ce jour. A partir de ce calcul, nous avons choisi de retenir ceux dont le meilleur jour fait partie de la période de planification présente, i.e. les jours J, J+1, J+2, J+3 et J+4 . Nous considérons donc un horizon de cinq(5) jours (ou moins si le maximum de 200 clients est excédé), pour constituer l'ensemble de clients potentiels E .

Plusieurs raisons motivent ce choix. Il faut noter que le calcul du seuil critique (SC) est fait avec un coût de transport dont $détour_i$ est égal à un(1) pour tous les clients. Or dans le quotidien ce coût varie selon les clients voisins (voir le détail du calcul de CT_i au chapitre IV). Il s'en suit qu'un jour antérieur au meilleur jour peut devenir plus attrayant que ce dernier en raison d'un coût de transport bien moindre. De même, si trop de clients partagent le même meilleur jour, il ne recevront plus en moyenne la quantité maximale qui était prévue lors du calcul de SC . Ainsi il peut être préférable de déplacer le jour de livraison vers une période moins achalandée. Pour toutes ces raisons, il est souhai-

table d'élargir l'horizon de planification pour tirer profit de ces opportunités. Notre planification est donc moins myope. A la limite, il serait même souhaitable de construire à chaque jour les routes des cinq(5) prochains jours. Nous aurions une idée plus juste des coûts de transport en jeu (au lieu d'une moyenne des cinq(5) meilleures insertions) et pourrions procéder à des échanges entre les jours en connaissance de cause. Cela ne signifie pas que les routes seraient définitives pour les cinq(5) prochains jours comme c'est le cas chez Dror [3]. Seule celle de la journée de planification le serait et nous reprendrions le même exercice le lendemain mais en tirant profit des degrés-jour du jour écoulé, et des prévisions mises à jour pour l'avenir. Malheureusement des problèmes de taille de mémoire et de temps d'exécution nous ont fait abandonner l'idée pour le moment. Les problèmes théoriques ne sont pas nécessairement évidents non plus.

Nous effectuons ensuite le calcul de la quantité maximale estimée pouvant être livrée à chaque client de E le jour J. Nous supposons, pour simplifier, que toutes les livraisons ont lieu à midi, et pour le client i la quantité consommée $CONSM_i$ entre les deux(2) livraisons est en moyenne

$$CONSM_i = \mu_i \times [0.5\ DJ_{J-nj_i-1} + \sum_{j=J-nj_i}^{J-1} DJ_j + 0.5 \times DJ_J] \ . \qquad (5.1)$$

Si suite à la dernière livraison le réservoir contenait β_i litres, alors la quantité maximum livrable à midi le jour J serait en moyenne

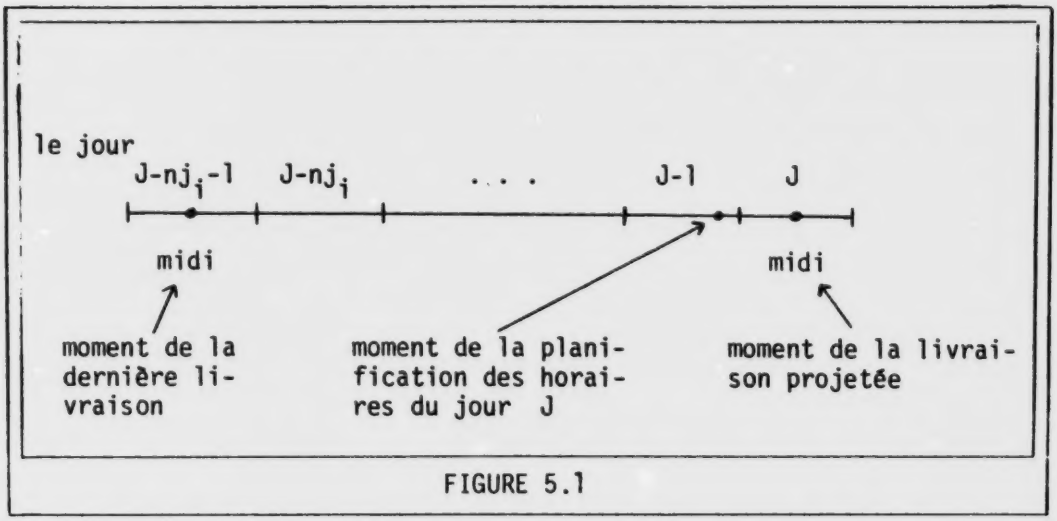


FIGURE 5.1

$$QTEMAX_i = r_i-(\beta_i-CONSM_i) \qquad (5.2)$$

Le paramètre $QTEMAX_i$ sert de borne supérieure sur la quantité livrée au client i ; remplir complètement son réservoir, dans ce contexte, signifie livrer la quantité $QTEMAX_i$.

La table des distances est calculée de la même façon que pour la première approche. Le problème de taille et de temps requis pour cette table se pose de manière encore plus aigüe ici puisque la deuxième approche demande plus de temps et d'espace que la première.

V.3.2 *L'étape 2*

La simplification de la première approche pour déterminer une première partition résulte simplement de l'amputation de l'étape de postoptimisation (le 2-opt). Puisque les clients dont le meilleur jour de livraison

est J ont un statut particulier en ce qu'ils doivent être visités en J , nous avons simplifié cette étape en ne retenant que ces clients dont on sait qu'une fois sur une route ils ne peuvent plus en être évincés.

Les CT_i^j sont calculés selon les termes du chapitre IV.

V.3.3 L'étape 3

V.3.3.1 la formulation mathématique

L'essentiel de ce qui suit s'inspire des travaux de Federgruen & Ziphin [9] et [11] pour un problème différent du nôtre mais assez semblable. Lorsqu'on permet de ne pas remplir complètement le réservoir d'un client, le problème à résoudre à chaque jour a la formulation mathématique suivante:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{B} d_{ij} x_{ijk} + \sum_{i=1}^{N} EC_i(w_i) \qquad (5.3)$$

sujet à

$$\sum_{i=1}^{N} w_i y_{ik} \leq CAPA \ , \ k = 1,\ldots,B \qquad (5.4)$$

$$0 \leq w_i \leq QTEMAX_i \ , \ i = 1,\ldots,N \qquad (5.5)$$

$$\sum_{k=0}^{B} y_{ik} = 1 \ , \ 1 \leq i \leq N \qquad (5.6)$$

$$y_{ik} \in \{0,1\} \ , \ i = 1,\ldots,N \ ; \ k = 0,\ldots,B \qquad (5.7)$$

$$\sum_{i=0}^{N} x_{ijk} = y_{jk} \quad , \; j = 1,\ldots,N \; ; \; k = 1,\ldots,B \tag{5.8}$$

$$\sum_{j=0}^{N} x_{ijk} = y_{ik} \quad , \; i = 1,\ldots,N \; ; \; k = 1,\ldots,B \tag{5.9}$$

$$X \in S \tag{5.10}$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad , \; i = 0,\ldots,N \; ; \; j = 0,\ldots,N \; ; \; k = 1,\ldots,B \tag{5.11}$$

$$\sum_{k \in CH_{\ell}} \left[\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} t_{ij} x_{ijk} + \sum_{i=1}^{N} w_i y_{ik} \times (CAVARI + CAVARO) + CAFIXE \sum_{i=1}^{N} y_{ik} + CAFIXO \right] \leq H$$

$$\ell = 1,\ldots,CA \tag{5.12}$$

où

B - nombre maximum de boucles. Si l'on suppose que chaque chauffeur fait au plus trois boucles par jour alors $B = 3 \times CA$,

CA - nombre de chauffeurs (≡ camions) disponibles à chaque jour,

CAFIXE - temps fixe de livraison chez le client,

CAFIXO - temps fixe de remplissage au dépot

CAPA - capacité de tous les camions (ℓ) ,

CAVARI - temps de livraison par litre chez le client (hre/ℓ) ,

CAVARO - temps de remplissage par litre d'un camion au dépot (hre/ℓ) ,

CH_ℓ - ensemble des boucles parcourues par le chauffeur ℓ ,

d_{ij} - distance pour un trajet direct de i à j ,

$EC_i(w_i)$ - $w_i>0$: espérance du coût annuel pour le client i si l'on planifie une livraison normale de w_i litres dès que son réservoir atteint le niveau atteint en moyenne le jour J à midi;

$w_i=0$: espérance du coût annuel pour le client i si la prochaine livraison n'a pas lieu en J et qu'elle se fait dans les conditions optimales qu'offrent les autres jours de la période de planification; le même patron est répété pour le futur,

H - durée maximum de la journée de tout chauffeur,

N - nombre de clients choisis à l'étape 1 (N=#E) ,

$QTEMAX_i$ - quantité maximale pouvant être livrée au client i s'il est visité en J ,

t_{ij} - temps pour le trajet direct de i à j ,

w_i - quantité livrée au client i ,

x_{ijk} - $\begin{cases} 1 & \text{si le trajet direct de } i \text{ à } j \text{ est effectué sur la boucle } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

y_{ik} - $\begin{cases} 1 & \text{si le client } i \text{ est visité suivant la } k^e \text{ boucle} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

La fonction économique (5.3) est constituée de deux termes indépendants: $\sum_{ijk} d_{ij}x_{ijk}$ les distances parcourues le jour de la livraison, et $\sum_{i} EC_i(w_i)$ l'espérance des coûts annuels totaux résultant du choix des quantités livrées w_i . Nous n'incluons que les clients de E , tous les autres ayant $w_i = 0$ et contribuant à la fonction économique d'une constante qui peut être ignorée. La contrainte (5.4) assure que pour chaque boucle la capacité du camion n'est pas excédée, tandis que la contrainte (5.5) garantit que l'on ne livre pas plus que le réservoir ne peut contenir. Les contraintes (5.6) et (5.7) font en sorte que tout client est assigné à une et une seule boucle où la boucle zéro (0) est artificielle et contient tous les clients de E non visités. Il est à noter qu'aucune contrainte exige que ceux dont le meilleur jour de livraison est J soient visités. C'est via la fonction économique que nous le faisons car pour ces clients $EC_i(0) = +\infty$, ce qui n'est pas le cas des autres clients. Les contraintes (5.8)-(5.11) définissent un problème du voyageur de commerce pour chaque boucle où (5.10) exclut les sous-tours. Finalement, (5.12) assure que la journée de tout chauffeur n'excède pas la durée maximale permise. Le temps du chauffeur se décompose comme suit:

- le temps de déplacement en camion: $\sum_{k\epsilon CH_\ell} \sum_{ij} t_{ij}x_{ijk}$,

- le temps de livraison chez le client:

$$\sum_{k\epsilon CH_\ell} [\sum_{i}(w_i y_{ik} \times CAVARI) + \sum_{i} y_{ik} \times CAFIXE]$$

- le temps de chargement au dépot:

$$\sum_{k\in CH_\ell} \left[\sum_i (w_i y_{ik} \times CAVARO) + Min\{1, \sum_i y_{ik}\} \times CAFIXO\right] .$$

V.3.3.2 *résolution générale*

Avant de traiter spécifiquement des items de l'étape 3 décrits à la section 2, nous abordons certains aspects de la résolution générale du problème énoncé en 3.3.1. On remarque que tout vecteur y détermine une partition $\{Y_1,\ldots,Y_k,\ldots,Y_B\}$ des clients visités parmi les B boucles. Si nous éliminons la contrainte (5.12), le problème se décompose en B problèmes semblables, chacun étant composé de deux(2) problèmes indépendants: le problème du voyageur de commerce sur les éléments de Y_k et le problème d'affectation (PA) suivant:

$$\text{Min} \sum_{i\in Y_k} EC_i(w_i)$$

s.à: Var. duales

(PA)

$$\sum_{i\in Y_k} w_i \leq CAPA \qquad \mu_k \qquad (5.13)$$

$$w_i \leq QTEMAX_i \ , \ i \in Y_k \qquad \nu_i \qquad (5.14)$$

$$w_i \geq 0 \ , \ i \in Y_k \ .$$

V.3.3.3 résolution de (PA)

(PA) est un problème de programmation convexe: (5.13) et (5.14) sont linéaires (donc convexes) et de classe C^1 . Nous avons montré au chapitre IV que EC_i était strictement convexe pour $0 < w_i < r_i$ et donc sur $0 < w_i \leq QTEMAX_i$. La somme de fonctions convexes reste convexe et $\sum_i EC_i$ est (strictement) convexe sur $0 < w_i \leq QTEMAX_i$. Pour le cas où $w_i = 0$ nous avons, au chapitre IV, contourné l'obstacle. "Officiellement" nous conservons l'intervalle $[0,QTEMAX_i]$ mais en fait nous limitons w_i à l'intervalle $[\bar{w}_i,QTEMAX_i]$ où $EC_i(\bar{w}_i) = EC_i(0)$ (voir la figure 4.11(a)). Puisque $\bar{w}_i > 0$, EC_i est bien strictement convexe sur $[\bar{w}_i,QTEMAX_i]$ il l'est par ricochet sur $[0,QTEMAX_i]$ également. (le cas particulier de la figure 4.10(b) où l'intervalle est réduit au point (0) est trivial).

Dans ces circonstances, les conditions de Kuhn - Tucker (K-T) sont une condition suffisante pour une solution optimale globale. Ces conditions sont:

$$\exists (w_i)_{i \in Y_k} , \mu_k \text{ et } (\nu_i)_{i \in Y_k} \ni$$

$$EC_i'(w_i) + \mu_k + \nu_i \geq 0 , \forall i \in Y_k$$

$$\mu_k \left(\sum_{i \in Y_k} w_i - CAPA \right) = 0$$

$$\nu_i (w_i - QTEMAX_i) = 0 , \forall i \in Y_k$$

$$[EC_i'(w_i)+\mu_k+\nu_i]w_i = 0 \ , \ \forall \ i \in Y_k$$

$$\sum_{i \in Y_k} w_i \leq CAPA$$

$$0 \leq w_i \leq QTEMAX_i \ , \ \forall \ i \in Y_k$$

$$\mu_k \geq 0 \ , \ \nu_i \geq 0 \ , \ \forall \ i \in Y_k \ .$$

Ces conditions s'écrivent également

$$EC_i'(w_i) \geq -(\mu_k+\nu_i) \ , \ \forall \ i \in Y_k \qquad (5.15)$$

$$\mu_k = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{Y_k} w_i = CAPA \qquad (5.16)$$

$$\nu_i = 0 \quad \text{ou} \quad w_i = QTEMAX_i \ , \ \forall \ i \in Y_k \qquad (5.17)$$

$$EC_i'(w_i) = -(\mu_k+\nu_i) \quad \text{ou} \quad w_i = 0 \ , \ \forall \ i \in Y_k \qquad (5.18)$$

$$\sum_{i \in Y_k} w_i \leq CAPA \qquad (5.19)$$

$$0 \leq w_i \leq QTEMAX_i \ , \ \forall \ i \in Y_k \qquad (5.20)$$

$$\mu_k \geq 0 \ , \ \nu_i \geq 0 \ , \ \forall \ i \in Y_k \ . \qquad (5.21)$$

Si l'on relâche la contrainte (5.13) de (PA), il reste

$$\text{Min} \sum_{i \in Y_k} EC_i(w_i)$$

$$(PA^-) \qquad 0 \le w_i \le QTEMAX_i \ , \ \forall\, i \in Y_k \qquad (5.22)$$

qui est séparable par client (on parle alors de $(PA^-)_i$) . La solution en est fort simple. EC_i étant strictement convexe, EC_i' est strictement croissante et la solution optimale $(\underline{w}_i)_{i \in Y_k}$ de (PA^-) est

$$\underline{w}_i = \begin{cases} (EC_i')^{-1}(0) & \text{si ce point est dans } [0, QTEMAX_i] \\ QTEMAX_i & \text{si } EC_i'(w_i) < 0 \text{ sur tout } [0, QTEMAX_i] \\ 0 & \text{si } EC_i'(w_i) > 0 \text{ sur tout } [0, QTEMAX_i] \end{cases} \qquad (5.23)$$

Revenons à (PA) et notons par $(w_i^*)_{i \in Y_k}$, μ_k^* et $(\nu_i^*)_{i \in Y_k}$ une solution aux conditions de K-T .

<u>1er cas</u>: $\sum_{i \in Y_k} \underline{w}_i < CAPA$

On a alors trivialement que si

$$w_i^* = \underline{w}_i \ , \text{ pour tout } i \in Y_k$$

$$\mu_k^* = 0 \quad \text{par (5.16)}$$

$$\nu_i^* = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le w_i^* < QTEMAX_i \quad \text{par (5.17)} \\ -EC_i'(QTEMAX_i) & \text{sinon par (5.18)} \end{cases}$$

alors (5.15)-(5.21) est satisfait.

2^e cas: $\sum_{i \in Y_k} \underline{w}_i \geq CAPA$

Dans ce cas la solution est presqu'aussi immédiate.

THÉORÈME 5.1: Si $\sum_{i \in Y_k} \underline{w}_i \geq CAPA$ alors la solution optimale $(w_i^*)_{i \in Y_k}$ de (PA) satisfait $\sum_{i \in Y_k} w_i^* = CAPA$.

PREUVE: Puisque $\underline{w}$ est solution optimale de (PA^-) et que (PA) est obtenu en incluant la contrainte additionnelle $\sum_{Y_k} w_i \leq CAPA$, il découle par convexité de la fonction économqiue que si cette dernière contrainte est violée alors il existe une solution optimale w^* de (PA) telle que $\sum_{Y_k} w_i^* = CAPA$. C.Q.F.D.

Le théorème précédent nous permet, dans le cas où $\sum_{i \in Y_k} \underline{w}_i \geq CAPA$, de remplacer la contrainte (5.13) par la contrainte $\sum_{i \in Y_k} w_i = CAPA$. C'est donc sur cette transformation de (PA) que nous portons maintenant notre intérêt. Ce problème est

$$\text{Min} \sum_{i \in Y_k} EC_i(w_i)$$

s.à.

$$\sum_{i \in Y_k} w_i = CAPA \qquad (5.24)$$

(PA^+)

$$0 \leq w_i \leq QTEMAX_i \ . \qquad (5.25)$$

Tout comme (PA) (et pour les mêmes motifs), c'est un problème de programmation convexe et les conditions de K-T sont suffisantes à l'obtention de la solution optimale. Elles sont:

$$\exists (w_i)_{i\in Y_k} , \alpha_k , (\beta_i)_{i\in Y_k}$$

tels que

$$EC_i'(w_i)+\alpha_k+\beta_i \geq 0 , \text{ pour tout } i \in Y_k$$

$$\beta_i(w_i-QTEMAX_i) = 0 , \text{ pour tout } i \in Y_k$$

$$w_i(EC_i'(w_i)+\alpha_k+\beta_i) = 0 \text{ pour tout } i \in Y_k$$

$$\sum_{i\in Y_k} w_i = CAPA$$

$$0 \leq w_i \leq QTEMAX_i , \text{ pour tout } i \in Y_k$$

$$\beta_i \geq 0 , \text{ pour tout } i \in Y_i .$$

Elles s'écrivent également

$$EC_i'(w_i) \geq -(\alpha_k+\beta_i) , \text{ pour tout } i \in Y_k \qquad (5.26)$$

$$\beta_i = 0 \text{ ou } w_i = QTEMAX_i , \text{ pour tout } i \in Y_k \qquad (5.27)$$

$$EC_i'(w_i) = -(\alpha_k+\beta_i) \text{ ou } w_i = 0 , \text{ pour tout } i \in Y_k \qquad (5.28)$$

$$\sum_{i\in Y_k} w_i = CAPA \qquad (5.29)$$

$$0 \leq w_i \leq QTEMAX_i \text{ , pour tout } i \in Y_k \qquad (5.30)$$

$$\beta_i \geq 0 \text{ , pour tout } i \in Y_k \text{ .} \qquad (5.31)$$

Nous allons déterminer une solution pour (PA^+) en résolvant de façon itérative les conditions de K-T . Soient $\alpha_k^*, (\beta_i^*)_{i \in Y_k}$ et $(w_i^*)_{i \in Y_k}$ les valeurs à l'optimum de (PA^+)

i) si $w_i^* = 0$ alors $\beta_i^* = 0$ par (5.27)

alors $EC_i'(w_i^*) \geq -\alpha_k^*$ par (5.26)

alors $-\alpha_k^* \leq EC_i'(0) < EC_i'(QTEMAX_i)$ (5.32)

car EC_i' est strictement croissante

ii) si $0 < w_i^* < QTEMAX_i$ alors $\beta_i^* = 0$ par (5.27)

alors $EC_i'(w_i^*) = -\alpha_k^*$ par (5.28)

et

$$EC_i'(0) < EC_i'(w_i^*) = -\alpha_k^* < EC_i'(QTEMAX_i) \qquad (5.33)$$

car EC_i' est strictement croissante

iii) si $w_i^* = QTEMAX_i$ alors $EC_i'(w_i^*) = -(\alpha_k^* + \beta_i^*)$ par (5.28)

alors $EC_i'(w_i^*) \leq -\alpha_k^*$ par (5.31)

et

$$EC_i'(0) < EC_i'(QTEMAX_i) = EC_i'(w_i^*) \leq -\alpha_k^* \text{ .} \qquad (5.34)$$

La figure 5.2 illustre les trois cas.

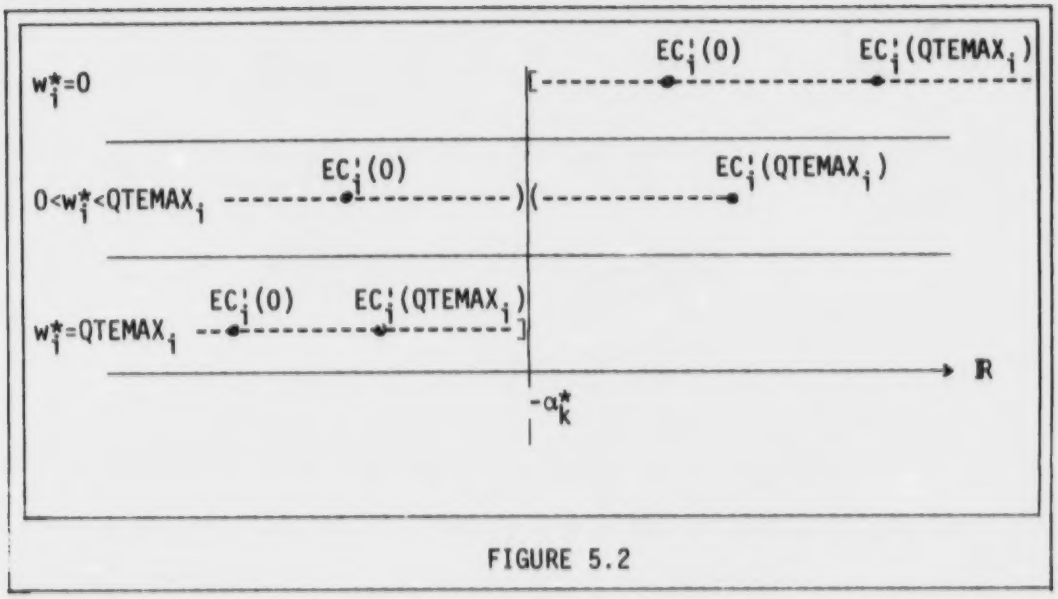


FIGURE 5.2

Dénotons par $I^* = \{I_o^*, I_p^*, I_c^*\}$ la partition de Y_k correspondante

$$I_o^* = \{i \epsilon Y_k : w_i^* = 0\} = \{i \epsilon Y_k : EC_i'(0) \geq -\alpha_k^*\}$$

$$I_p^* = \{i \epsilon Y_k : 0 < w_i^* < QTEMAX_i\} = \{i \epsilon Y_k : EC_i'(0) < -\alpha_k^* < EC_i'(QTEMAX_i)\}$$

$$I_c^* = \{i \epsilon Y_k : w_i^* = QTEMAX_i\} = \{i \epsilon Y_k : EC_i'(QTEMAX_i) \leq -\alpha_k^*\} .$$

Ordonnons dans l'ordre croissant les valeurs $EC_i'(0)$ et $EC_i'(QTEMAX_i)$, $i \epsilon Y_k$, et dénotons cette suite

$$-\infty = s_0 < s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_{2|Y_k|} < s_{2|Y_k|+1} = \infty . \qquad (5.35)$$

Toute valeur (optimale ou non) du multiplicateur α_k détermine un intervalle unique $[s_i, s_{i+1}]$ où i est le plus petit indice tel que

$s_i < -\alpha_k \leq s_{i+1}$. De plus, se référant à la figure 5.2, à cette valeur de α_k correspond une partition $I = \{I_o, I_p, I_c\}$ spécifiée comme suit:

$$I_o = \{i \in Y_k : EC_i'(0) \geq -\alpha_k\}$$

$$I_p = \{i \in Y_k : EC_i'(0) < -\alpha_k < EC_i'(QTEMAX_i)\}$$

$$I_c = \{i \in Y_k : EC_i'(QTEMAX_i) \leq -\alpha_k\} .$$

D'autre part, EC_i étant strictement convexe (théorème 4.1) alors EC_i' est une fonction strictement croissante, pour tout $i \in Y_k$. Par conséquent, la fonction inverse $(EC_i')^{-1}$ existe et est également strictement croissante. Il s'ensuit que la fonction $G_J \triangleq \sum_J (EC_i')^{-1}$ est strictement croissante (si $J \neq \emptyset$) . En particulier, si I est la partition associée à $-\alpha_k \in [s_i, s_{i+1}]$ alors G_{I_p} est strictement croissante sur $[s_i, s_{i+1}]$ (si $I_p \neq \emptyset$) . Lors du passage de $-\alpha_k \in [s_i, s_{i+1}]$ à $-\alpha_k \in [s_{i+1}, s_{i+2}]$ la partition I est modifiée comme suit:

i) ou bien il existe $i_o \in Y_k$ passant de I_p à I_c

ii) ou bien il existe $i_o \in Y_k$ passant de I_o à I_p .

NOTE: En général un seul tel i_o est impliqué dans le changement Il y a exception lorsque par exemple $s_{i+1} = EC_{i_o}'(0) = EC_{i_1}'(QTEMAX_{i_1})$.

La figure 5.3 illustre le cas i) où le point i_o est i_4 .

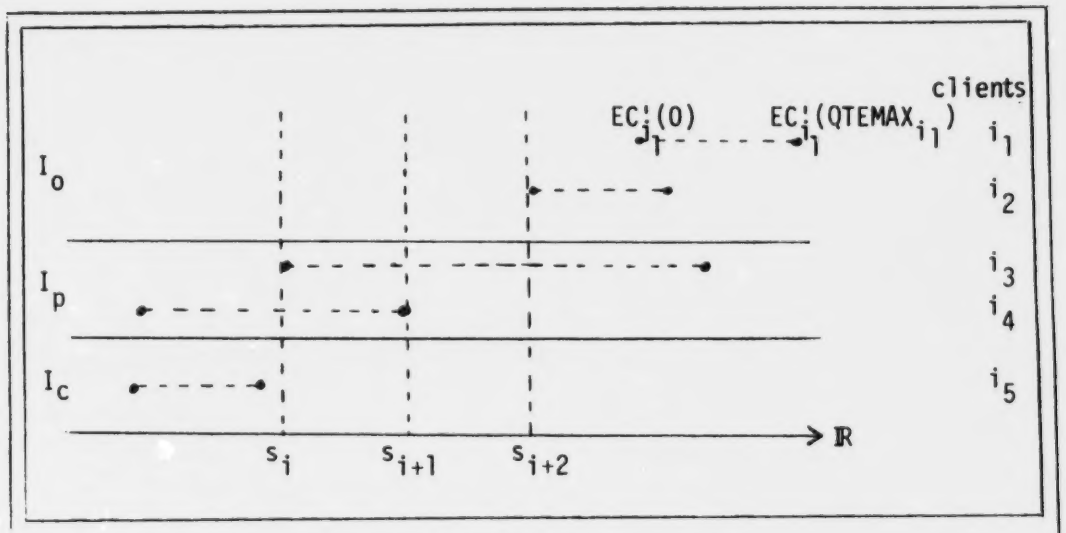


FIGURE 5.3

Les cas i) et ii) sont semblables et nous nous contentons d'examiner le premier. Dans ce cas, I_p devient $I_p-\{i_o\}$ et I_c devient $I_c \cup \{i_o\}$. Sur $[s_i,s_{i+1}]$ $(EC^{\cdot}_{i_o})^{-1}(-\alpha_k)$ croît à mesure que $-\alpha_k$ s'approche de s_{i+1}, pour atteindre $(EC^{\cdot}_{i_o})^{-1}(s_{i+1}) = QTEMAX_{i_o}$. Sur $[s_{i+1},s_{i+2}]$, i_o demeure en I_c. Globalement, $G_{I_p}(-\alpha_k) + \sum_{I_c} QTEMAX_i$ croît sur $[s_i,s_{i+1}]$. En effet, $\sum_{I_c} QTEMAX_i$ y est constant tandis que G_{I_p} y est strictement croissante (si $I_p \neq \emptyset$). Cette même fonction devient $G_{I_p-\{i_o\}}(-\alpha_k) + \sum_{I_c\cup\{i_o\}} QTEMAX_i$ sur $[s_{i+1},s_{i+2}]$ et est aussi strictement croissante. Sur $[s_i,s_{i+2}]$, si i demeure dans I_p alors $(EC^{\cdot}_i)^{-1}(-\alpha_k)$ est strictement croissante; si i demeure dans I_c alors il contribue par la constante

$$QTEMAX_i \text{ à } G_{I_p}(-\alpha_k) + \sum_{I_c} QTEMAX_i$$

il existe i_o dont $(EC^!_{i_o})^{-1}(-\alpha_k)$ croît strictement sur $[s_i, s_{i+1}]$ pour rester constante à $(EC^!_{i_o})^{-1}(s_{i+1}) = QTEMAX_{i_o}$ sur $[s_{i+1}, s_{i+2}]$. En résumé, $G_{I_p}(-\alpha_k) + \sum_{I_c} QTEMAX_i$ croît strictement sur $[s_i, s_{i+2}]$ (si I_p y demeure non vide) .

Le théorème suivant nous indique une propriété des plus importante pour spécifier l'algorithme de résolution.

THÉORÈME 5.2: $G_{I_p^*}(-\alpha_k^*) = CAPA - \sum_{i \in I_c^*} QTEMAX_i$.

PREUVE: Soit w^* la solution optimale unique à (PA^+) .

Si $i \in I_p^*$ alors $0 < w_i^* < QTEMAX_i$, par définition de I_p^*

alors $EC^!_i(w_i^*) = -\alpha_k^*$ par (5.33)

et donc $w_i^* = (EC^!_i)^{-1}(-\alpha_k^*)$. (5.36)

Si $i \in I_c^*$ alors $w_i^* = QTEMAX_i$, par définition de I_c^* (5.37)

et si $i \in I_o^*$ alors $w_i^* = 0$, par définition de I_o^* (5.38)

w^* étant solution réalisable de (PA^+) nous avons

$$\sum_{i \in Y_k} w_i^* = CAPA .$$

Ainsi

$$\sum_{i\in I_o^*} w_i^* + \sum_{i\in I_p^*} w_i^* + \sum_{i\in I_c^*} w_i^* = CAPA ,$$

car $\{I_o^*, I_p^*, I_c^*\}$ est une partition de Y_k

$$0 + \sum_{i\in I_p^*} (EC_i')^{-1}(-\alpha_k^*) + \sum_{i\in I_c^*} QTEMAX_i = CAPA \text{ , par (5.36)} \quad \text{---} \quad (5.38)$$

par conséquent

$$G_{I_p^*}(-\alpha_k^*) = CAPA - \sum_{i\in I_c^*} QTEMAX_i .$$

C.Q.F.D.

Le multiplicateur optimal α_k^* étant un scalaire il appartient à un seul intervalle $[s_{i*}, s_{i*+1}]$ (les s_i étant spécifiés en (5.35)) où $i*$ est le plus petit indice i tel que

$$s_{i*} < -\alpha_k^* \leq s_{i+1}^* . \qquad (5.39)$$

La fonction $G_{I_p}(-\alpha_k) + \sum_{I_c} QTEMAX_i$ étant strictement croissante (lorsque $I_p \neq \phi$) , l'intervalle $[s_{i*}, s_{i*+1}]$ est entièrement déterminé par

$$G_{I_p}(s_{i*}) < CAPA - \sum_{I_c} QTEMAX_i \qquad (5.40)$$

$$G_{I_p}(s_{i*+1}) \geq CAPA - \sum_{I_c} QTEMAX_i \qquad (5.41)$$

ce qui définit notre critère d'optimalité. Il reste toutefois à considérer le cas où $I_p = \phi$ sur un intervalle $[s_i, s_{i+1}]$. Dans ce cas pour

tout $i \in Y_k$ ou bien $i \in I_o$, ou bien $i \in I_c$ de sorte que si l'on définit $G_J = 0$ lorsque $J = \phi$, $G_{I_p}(-\alpha_k) + \sum_{I_c} QTEMAX_i$ est constant et égal à $\sum_{I_c} QTEMAX_i$ sur $[s_i, s_{i+1}]$. Nous pouvons donc conclure que sur $\mathbb{R}$, $G_{I_p}(-\alpha_k) + \sum_{I_c} QTEMAX_i$ est non décroissant et le critère d'optimalité continue de s'appliquer. Si pour cette partition $\{I_o, I_c\}$ l'on a $\sum_{I_c} QTEMAX_i = CAPA$, alors nous avons une partition optimale et toutes les valeurs de $[s_i^*, s_{i+1}^*]$ font l'affaire pour $-\alpha_k^*$. Le critère d'optimalité (5.40)-(5.41) nous fera choisir $-\alpha_k^* = s_{i*}$.

Nous résumons maintenant le tout en énonçant l'algorithme de résolution de (PA), qui incorpore celui de (PA^+).

1- Pour tout $i \in Y_k$, déterminer la solution optimale $\underline{w}$ de (PA^-).

$$(PA^-) \qquad \text{MIN } EC_i(w_i)$$

$$\text{s.à} \qquad 0 \le w_i \le QTEMAX_i \ , \ i \in Y_k \ .$$

La solution est

$$\underline{w}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } EC_i'(0) \ge 0 \\ \text{Min}(QTEMAX_i, (EC_i')^{-1}(0)) & \text{sinon .} \end{cases}$$

2. Si $\sum_{Y_k} \underline{w}_i < CAPA$ alors la solution optimale w^* de (PA) est

$$w_i^* = \underline{w}_i \quad \text{pour tout} \quad i \in Y_k$$

$$\mu_k^* = 0$$

$$\nu_i^* = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad w_i^* \neq QTEMAX_i \\ -EC_i'(w_i^*) & \text{sinon} \end{cases}$$

à remarque que si $w_i^* = 0$ alors le client i est retiré de la boucle Y_k , en tenant compte de l'économie de temps qui en découle.

Sinon résoudre (PA^+)

$$\text{Min} \sum_{Y_k} EC_i(w_i)$$

(PA^+)

$$\text{s.à} \qquad \sum_{Y_k} w_i = CAPA$$

$$0 \leq w_i \leq QTEMAX_i \ , \ i \in Y_k \ .$$

2.1 On débute avec l'intervalle $[s_{2|Y_k|}, s_{2|Y_k|+1}{}^{=\infty})$, dans ce cas $I_c = Y_k$ et seul (5.40) a à être vérifié. S'il ne l'est pas c'est que $G_{I_p}(s_{2|Y_k|}) + \sum_{I_c} QTEMAX_i$ est trop élevé (i.e. supérieur à CAPA).

2.2 $G_{I_p}(-\alpha_k) + \sum_{I_c} QTEMAX_i$ étant non décroissante, il suffit de parcourir les s_i pour des indices i décroissant jusqu'à ce que (5.40) soit satisfait.

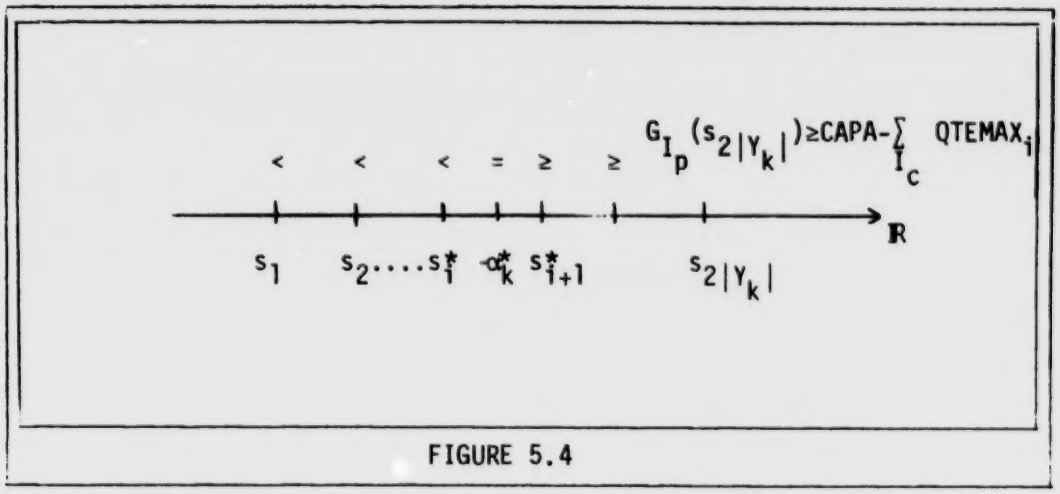


FIGURE 5.4

2.3 Si $I_p^* \neq \phi$, résoudre $G_{I_p^*}(\lambda) = CAPA - \sum_{I_c^*} QTEMAX_i$ par bissection et si Λ^* en est la solution alors les multiplicateurs optimaux de (PA^+) sont:

$$\alpha_k^* = -\Lambda^*$$

$$\beta_i^* = \begin{cases} 0 \quad si \quad i \in I_p^* \cup I_o^* \\ -\alpha_k^* - EC_i'(QTEMAX_i) \quad si \quad i \in I_c^* \end{cases}$$

et

$$w_i^* = \begin{cases} 0 \quad si \quad i \in I_o^* \\ (EC_i')^{-1}(-\alpha_k^*) \quad si \quad i \in I_p^* \\ QTEMAX_i \quad si \quad i \in I_c^* \end{cases}$$

Sinon

$$w_i^* = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in I_o^* \\ QTEMAX_i & \text{si } i \in I_c^* \end{cases}$$

et

$$\alpha_k^* = -s_{i*} = - \max_{i \in I_c^*} \{EC_i^!(QTEMAX_i)\}$$

$$\beta_i^* = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in I_o^* \\ -\alpha_k^* - EC_i^!(QTEMAX_i) & \text{si } i \in I_c^* . \end{cases}$$

2.4 Les multiplicateurs optimaux que nous désirons sont ceux de (PA) et non ceux de (PA^+) énoncés en 2.3. Par le théorème 5.4 qui suit nous pouvons cependant poser

$$\mu_k^* = \alpha_k^*$$

$$\nu_i^* = \beta_i^* \quad \text{pour tout } i \in Y_k .$$

Fin de l'algorithme.

THÉORÈME 5.3: Si $(\underline{w})_{i \in Y_k}$ est la solution optimale de (PA^-) et si $\sum_{Y_k} \underline{w}_i \geq CAPA$ alors la solution optimale $(w^*)_{i \in Y_k}$ de (PA) est telle que $w_i^* \leq \underline{w}_i$, pour tout $i \in Y_k$

PREUVE: Supposons le contraire et montrons une contradiction. Par hypothèse, il existe $i_o \in Y_k$ tel que $w^*_{i_o} > \underline{w}_{i_o}$ et puisque $\sum_{Y_k} w^*_i = CAPA \leq \sum_{Y_k} \underline{w}_i$ alors il existe $j_o \in Y_k$ tel que $w^*_{j_o} < \underline{w}_{j_o}$. Soit $\varepsilon \triangleq Min(w^*_{i_o} - \underline{w}_{i_o}, \underline{w}_{j_o} - w^*_{j_o})$ et soit la solution réalisable de (PA) w^{**} définie comme suit:

$$w^{**}_i = \begin{cases} w^*_i & \text{si } i \neq i_o, j_o \\ w^*_i - \varepsilon & \text{si } i = i_o \\ w^*_i + \varepsilon & \text{si } i = j_o \end{cases}$$

alors nous avons $\underline{w}_{i_o} \leq w^{**}_{i_o} < w^*_{i_o}$ et $w^*_{j_o} < w^{**}_{j_o} \leq \underline{w}_{j_o}$. Puisque $\underline{w}_i$ est la solution optimale de $(PA^-)_i$ pour tout $i \in Y_k$ (car EC_i est strictement convexe) alors

$$EC_{i_o}(w^{**}_{i_o}) < EC_{i_o}(w^*_{i_o}) \text{ et } EC_{j_o}(w^{**}_{j_o}) < EC_{j_o}(w^*_{j_o})$$

de sorte que

$$\sum_{Y_k} EC_i(w^{**}_i) < \sum_{Y_k} EC_i(w^*_i),$$

ce qui contredit que w^* soit solution optimale de (PA). C.Q.F.D.

THÉORÈME 5.4: L'étape 2.4 de l'algorithme de (PA) est valide, i.e. que les multiplicateurs optimaux de (PA^+) tels que définis à l'étape 2.3 sont valides pour (PA).

PREUVE: Soient $\underline{w}$ la solution optimale de (PA^-) et w^* celle de (PA^+) et de (PA) (nous sommes dans le cas où $\sum_{Y_k} \underline{w}_i \geq CAPA$ et il

suffit de résoudre (PA^+) pour avoir la solution de (PA), c'est le théorème 5.1). Les conditions de K-T pour (PA) sont (5.15)-(5.21) et celles de (PA^+) (5.26)-(5.31). Puisque dans (PA^+) $\sum_{V_k} w_i^* = CAPA$, alors (5.16) est vérifié et seul le signe de μ_k différencie les deux ensembles de conditions. Il suffit donc de montrer que l'algorithme génère toujours $\alpha_k^* \geq 0$.

Dans la résolution de (PA^-) nous avons

$$EC_i'(\underline{w}_i) \leq 0 \quad \text{ou} \quad EC_i'(0) > 0 \quad \text{et} \quad \underline{w}_i = 0 \tag{5.42}$$

car EC_i' est strictement croissante.

<u>Si</u> $\underline{w}_i > 0$ alors $EC_i'(\underline{w}_i) \leq 0$ par (5.42), et puisque $w_i^* \leq \underline{w}_i$ (Théorème 5.3) et que EC_i' est strictement croissante alors $EC_i'(w_i^*) \leq 0$ <u>sinon</u> $\underline{w}_i = 0$ et $0 \leq w_i^* \leq \underline{w}_i$ font que $w_i^* = 0$ on a donc

$$EC_i'(w_i^*) \leq 0 \quad \text{ou} \quad w_i^* = 0 . \tag{5.43}$$

<u>Si</u> $I_p^* \neq \phi$ alors il existe $i_o \in I_p^*$ tel que $QTEMAX_{i_o} > w_{i_o}^* > 0$ et $EC_{i_o}'(w_{i_o}^*) \leq 0$ par définition de I_p^* et (5.43) mais par (5.27) et (5.28), $\beta_{i_o} = 0$ et $EC_{i_o}'(w_{i_o}^*) = -\alpha_k^*$ et par (5.43) $\alpha_k^* \geq 0$. <u>Sinon</u> $I_c^* \neq \phi$ (car $CAPA > 0$) et pour tout $i \in I_c^*$ on a $EC_i'(w_i^*) \leq 0$ par (5.43) et donc $\alpha_k^* = -s_{i^*} = -Max\{EC_i'(QTEMAX_i) \mid i \in I_c\} \geq 0$, par définition de α_k^* à l'étape 2.3 de l'algorithme; de plus la définition de β_i^* est satisfaisante pour ν_i^* car par définition de α_k^* on a: $-\alpha_k^* \geq EC_i'(QTEMAX_i)$ pour tout $i \in I_c^*$ et donc $\beta_i^* = -\alpha_k^* - EC_i'(QTEMAX_i) \geq 0$ pour tout $i \in I_c^*$

et $v_i^* = \beta_i^* \geq 0$ pour tout $i \in Y_k$. C.Q.F.D.

V.3.3.4 *remplacement implicite de la contrainte (5.12)*

Lorsque nous avons décomposé le problème 3.3.1 en plusieurs problèmes (PA) , nous avons bien pris soin au préalable d'éliminer la contrainte (5.12). Cette contrainte, qui lie les divers (PA) d'un même chauffeur, dépend du temps t_{ij} et de la quantité livrée w_i , mais l'objectif de (PA) ne dépend pas de t_{ij} . En résolvant (PA) , c'est un peu comme si nous figions les arcs reliant les éléments de Y_k et que nous tentions d'améliorer la fonction économique uniquement en faisant varier $(w_i)_{i \in Y_k}$. Nous allons en tirer profit en procédant à des modifications ne touchant qu'au plus deux(2) boucles à la fois: soit en ajoutant un client à une boucle, soit en procédant à un échange du type 2-OPT à l'intérieur de l'algorithme r-OPT . Nous tenons compte implicitement de la contrainte (5.12) comme suit:

1er cas: l'ajout: nous désirons ici insérer un client i_o ne se trouvant pas sur une boucle, entre deux clients consécutifs i_1, i_2 d'une même boucle b_1 d'un chauffeur c_1 .

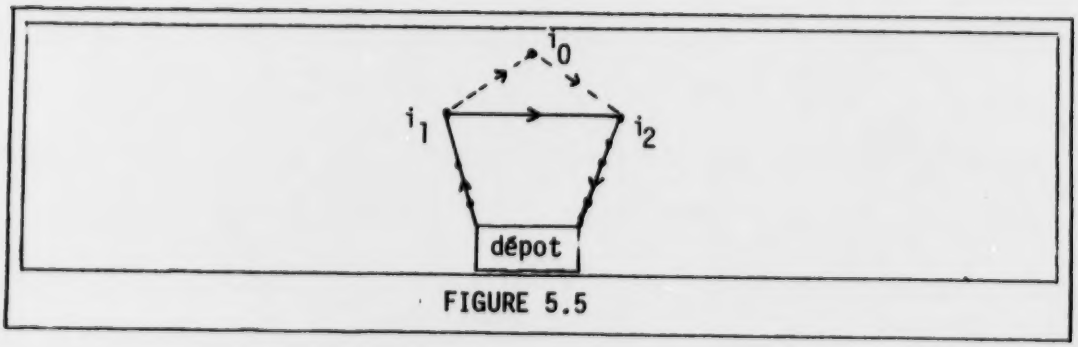


FIGURE 5.5

Soient

T_1 = temps total de parcours des autres boucles (s'il y a lieu) du chauffeur c_1 ,

T_2 = temps total de parcours de la boucle b_1 avant l'insertion de i_o ,

alors $T_2 = T'_2+T''_2$ où T'_2 est la partie indépendante de w , i.e.

$$T'_2 = \sum_i \sum_j t_{ij} x_{ijb_1} + \sum_i \text{CAFIXE} + \text{CAFIXO}$$

$$T''_2 = \sum_i w_i y_{ib_1} \ (\text{CAVARO} + \text{CAVARI})$$

et soit

DELTAT = temps fixe supplémentaire occasionné par l'ajout de i_o

$$= t_{i_1,i_o} + t_{i_o,i_2} - t_{i_1,i_2} + \text{CAFIXE} .$$

Fixant les autres boucles du même chauffeur et ajustant le temps fixe (i.e. indépendant de w) sur la boucle b_1 suite à l'ajout de i_o , alors la quantité maximale pouvant maintenant être livrée sur b_1 est

$$d' = \text{Min}(\text{CAPA}, \text{Max}(0, \frac{H-T_1-T'_2-\text{DELTAT}}{\text{CAVARO}+\text{CAVARI}})) . \qquad (5.44)$$

En ajustant ainsi la quantité maximale livrable nous tenons compte implicitement de (5.12).

2^e cas: échange impliquant une seule boucle: l'échange transforme la boucle de la figure 5.6 (a) en celle de la figure 5.6 (b)

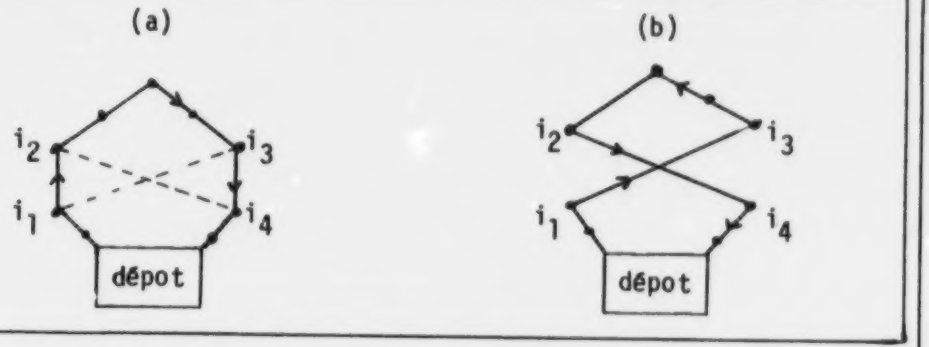


FIGURE 5.6

Cette fois-ci aucun client n'est ajouté. Seul l'ordre de parcours est modifié par le remplacement des arcs (i_1,i_2) et (i_3,i_4) par les arcs (i_1,i_3) et (i_2,i_4). Si T_1,T_2',T_2'' conservent la même signification et si DELTAT est maintenant la variation dans le temps de parcours suite à l'échange, alors d' conserve la même signification et est donné par (5.44).

3^e cas: échange impliquant deux boucles:

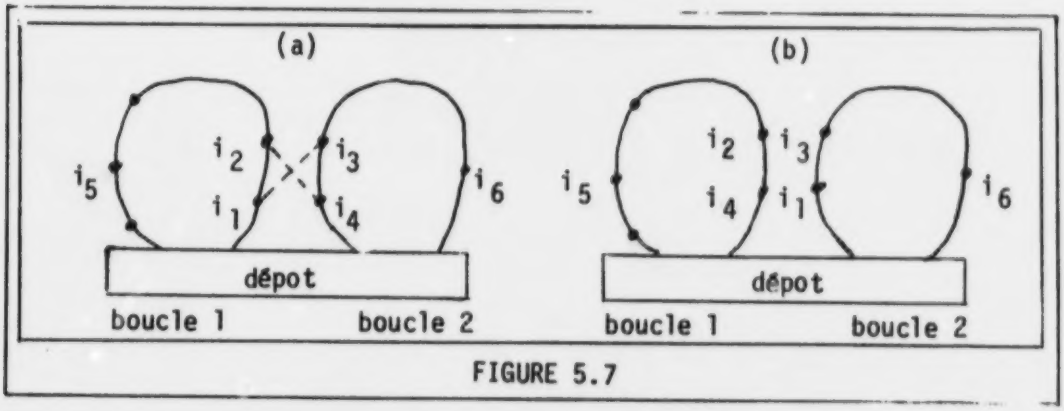


FIGURE 5.7

i) les deux boucles sont parcourues par des chauffeurs différents: ce cas n'est pas plus complexe que le précédent. Il suffit d'appliquer (5.44) séparément pour les deux chauffeurs. Soient

T'_1 = temps total de parcours des autres boucles que la première pour le chauffeur 1 ,

T'_2 = temps fixe de parcours sur la boucle 1 du chauffeur 1 après l'échange ,

d'_1 = nouvelle limite de capacité de la boucle 1 du chauffeur 1 ,

alors $d'_1 = \text{Min}(\text{CAPA}, \text{Max}(0, \frac{H-T'_1-T'_2}{\text{CAVARO}+\text{CAVARI}}))$ d'_2 est obtenu similairement.

ii) les deux boucles sont parcourues par le même chauffeur. Soient:

T_1 = temps total de parcours pour les autres boucles de ce chauffeur,

T_2 = temps fixe de parcours des deux boucles suite à l'échange

alors $d' = \text{Min}(2 \times \text{CAPA}, \text{Max}(0, \frac{H-T_1-T_2}{\text{CAVARO}+\text{CAVARI}}))$ représente la limite de capacité globale pour les deux boucles et on ne peut éliminer la contrainte (5.12). Nous ne sommes pas allés jusqu'à résoudre le problème sur les boucles globalement. Nous avons plutôt arbitrairement séparé d' en d'_1 et d'_2 .

- Si $d' = 2 \times \text{CAPA}$ alors $d'_1 = d'_2 = \text{CAPA}$.

- Sinon, nous divisons d' au pro rata des moyennes μ_i des clients de chaque boucle, car μ_i (le taux de consommation moyen par degré-jour du client i) mesure l'urgence à servir un client: tous les clients sont à moins de (5) jours de leur meilleur jour mais ceux dont la consommation est la plus élevée sont particulièrement dangeureux car dans leur cas mj_i coïncide presque avec M_i (car σ/μ_i est faible et donc l'incertitude faible) i.e. la pénurie.

En procédant ainsi, le problème sur les deux boucles est séparé en problèmes indépendants et sans contrainte (5.12), même si le résultat n'est pas nécessairement globalement optimal.

Nous revenons maintenant aux items de l'étape 3 décrite en 5.2.

V.3.3.5 *solution complète à partir de la solution initiale*

La solution initiale fournie par l'étape 2 a la particularité que le réservoir de tout client visité est rempli entièrement. Cet artifice nous assure que toute solution conservant la même partition des clients sera réalisable, peu importe les quantités livrées. La contrainte (5.12) ne joue pas ni celle de capacité (5.4) de sorte que la solution des problèmes $(PA)_k$ se réduit à celle de problèmes (PA^-) .

V.3.3.6 *l'ajout*

Notre procédure de postoptimisation r-OPT permet d'améliorer la fonction économique par des échanges d'arcs. Cette procédure ne modifie

que l'ordre de livraison sans jamais ajouter de clients aux boucles (la seule exception étant lorsqu'un échange entraîne une livraison nulle chez un client, auquel cas le client est retiré de l'ensemble de départ). Or la postoptimisation réduit la fonction économique principalement en améliorant les parcours pour en diminuer le temps et permettre la livraison de plus grandes quantités chez les clients.

Ces améliorations pourraient également permettre l'ajout d'un client à une boucle si cela s'avérait profitable. Un bon candidat serait par exemple le client j ci-dessous qui occasionnait un détour trop important en (a) avant l'échange mais qui suite à l'échange se retrouve sur l'arc (i_1, i_3) et n'exige aucun détour.

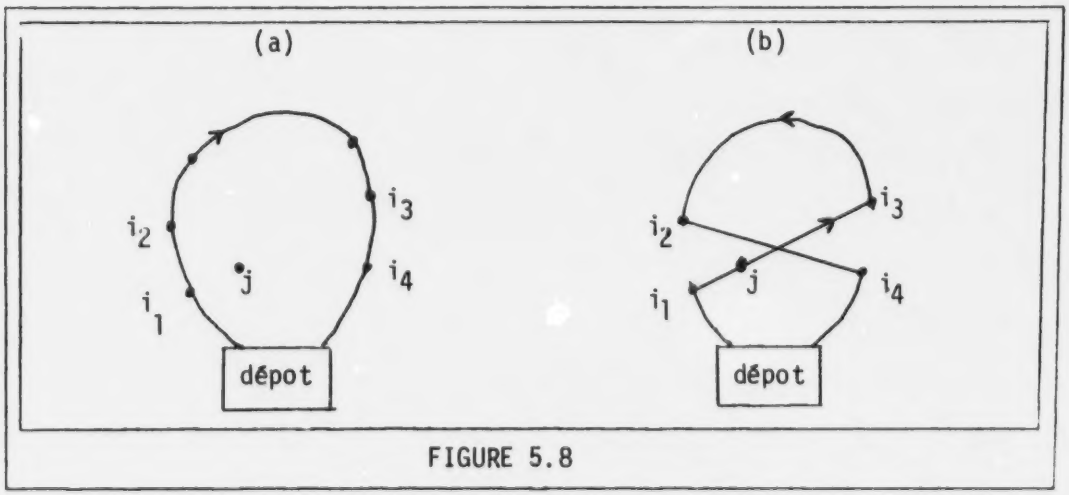


FIGURE 5.8

La procédure d'ajout est intercallée dans celle de postoptimisation et est exécutée périodiquement. La fréquence de cette exécution est importante. Elle doit être suffisamment élevée pour que les clients qui

seront de la solution finale y soient le plus tôt possible. D'autre part il faut attendre assez longtemps pour que les gains réalisés lors de la postoptimisation soient assez importants. Si nous tentons un ajout au moindre petit gain, nous n'aurons jamais la place pour un client très urgent à servir mais nécessitant un important détour.

Pour des raisons de temps d'exécution, il est impensable de calculer l'effet exact de chaque ajout potentiel et de les ordonner pour effectuer le meilleur d'abord, et ce jusqu'à ce qu'aucun ne puisse plus améliorer les choses. Il faut se contenter plutôt d'estimer l'effet de chaque ajout. La façon d'évaluer ces estimés sera précisée à la section sur le r-OPT . Il n'est également pas possible, pour des raisons d'espace mémoire, de retenir tous les ajouts potentiels et leur effet estimé. L'algorithme d'ajout est le suivant:

1. Pour tout client de E (l'ensemble de clients choisis à l'étape 1) ne se trouvant pas sur une route, calculer l'estimé de toute insertion possible et mémoriser la meilleure dans un "heap" si son gain est positif. Afin d'éliminer les insertions qui n'ont que peu de chances de succès, nous ne considérons pas celles dont la nouvelle borne de capacité d' est inférieure à 40% de l'ancienne. A noter qu'un cas particulier d'insertion consiste à créer une nouvelle boucle lorsque leur nombre maximum n'est pas déjà atteint.

2. Retirer du "heap" le meilleur estimé d'insertion. S'il est encore exécutable, le réaliser et reprendre 2.; sinon, calculer pour le client touché par cette insertion la meilleure insertion maintenant exécutable et l'ajouter

au heap. Il est en effet possible qu'une insertion qui était exécutable au moment de son ajout au heap ne le soit plus lorsqu'elle en est retirée. Les ajouts qui ont été réalisés au cours de l'itération peuvent ne plus permettre son exécution, comme ils peuvent également créer de nouvelles possibilités. Reprendre l'étape 2.

3. L'algorithme prend fin lorsque tous les clients de E sont visités ou lorsqu'aucun ajout ne peut procurer de gain positif.

REMARQUE: Une insertion dont le gain estimé est positif mais dont le gain réel est négatif présente le danger d'être continuellement générée et de provoquer une boucle sans fin. Pour s'en protéger, nous avons institué une "liste noire" mémorisant de tels cas et les éliminant dès qu'ils se représentent.

V.3.3.7 le r-OPT

Nous n'avons jusqu'ici que généré une première solution réalisable. Il reste à l'améliorer. La technique d'ajout est une des composantes permettant de le faire, mais la principale est la technique du r-OPT. La version que nous avons utilisée s'inspire de celle proposée par Federgruen & Zipkin [9] et est une extension de la méthode originale de Lin & Kernighan [8] pour le problème du voyageur de commerce et qui fut appliquée au "Véhicule routing problem" par Christifides & Eilon [10].

La description de l'algorithme 2-OPT au chapitre 2 nous a familiarisés avec la notion d'échange: remplacer deux(2) arcs par deux(2) autres de telle sorte que le tour demeure connexe. On procède à de tels échanges aussi longtemps que l'on peut améliorer. A la fin, il est possible que l'on ait atteint l'optimum comme il est possible que l'on n'ait atteint qu'un minimum local. On peut motiver l'algorithme r-OPT comme suit: soit T un tour initial de n sommets qui n'est pas optimal. Si T n'est pas optimal, c'est qu'il diffère du tour optimal T^* par k arcs, où $1 \leq k \leq n$. Si l'on connaissait k, il "suffirait" d'essayer tous les échanges possibles de k arcs $x_1,\ldots x_k$ de T pour k arcs $y_1,\ldots,y_k$ hors de T, et le meilleur tel échange nous fournirait T^*. Ignorant k, il apparaît artificiel de fixer k a priori (comme cela est fait avec $k = 2$ dans le 2-OPT), d'autant plus que plus k est élevé, plus l'effort requis est important. L'algorithme ne fixe donc jamais k. Voici les grandes lignes de l'algorithme dans le cadre du problème du voyageur de commerce (notons que nous n'exigeons pas que suite à un échange le tour demeure connexe):

1. Fixer x_1. Procéder à un premier échange x_1 pour y_1 (le meilleur disponible à ce moment) générant un gain g_1, puis un deuxième échangeant x_2 pour y_2 (le meilleur à ce moment) générant un gain g_2, ... aussi longtemps que le gain global $\sum g_i$ est positif.

2. Lorsque $\sum_{i=1}^{r_0} g_i$ n'est plus positif, les échanges cessent et on retient le tour ayant généré le plus grand gain $\sum_{i=1}^{r^*} g_i$ pour $1 \leq r^* \leq r_0-1$.

3. Reprendre 1. et 2. pour d'autres x_1 et conserver le meilleur tour ainsi généré.

4. Reprendre 1., 2. et 3. aussi longtemps que le tour résultant améliore le précédent.

Notons qu'à l'étape 1. il est possible que le gain g_{i_o} soit négatif mais si $\sum_{i=1}^{i_o} g_i > 0$ alors l'algorithme se poursuit. Cela peut aider à s'évader de minimums locaux. Le critère de cesser toute recherche dès que $\sum g_i \leq 0$ est basé sur un principe simple, prouvé dans [8]. Nous nous contentons de l'énoncer: si la suite d'échanges x_i pour y_i, $i = 1,\ldots,k$ menant de T à T^* est telle que $\sum_{i=1}^{k} g_i > 0$ alors cette suite peut être permutée cycliquement en x_{i_j}, y_{i_j}, $j = 1,\ldots,k$ de telle sorte que toute somme partielle $\sum_{j=1}^{j_o} g_{i_j}$, $1 \leq j_o \leq k$ soit positive. Par conséquent on peut se contenter de n'examiner que ce type de suite puisque l'une d'entres elles nous conduit à l'optimum.

Tel qu'il est énoncé et suite à la dernière remarque, il peut sembler que l'algorithme livre la solution optimale T^* à coup sûr! Ce n'est pas le cas. En effet, en général pour faciliter le travail et éviter les recherches inutiles, on exige que suite à chaque échange de l'étape 1., le tour résultant soit réalisable au sens défini ci-dessous assurant que nous ouissions retrouver la connexité par un échange supplémentaire.

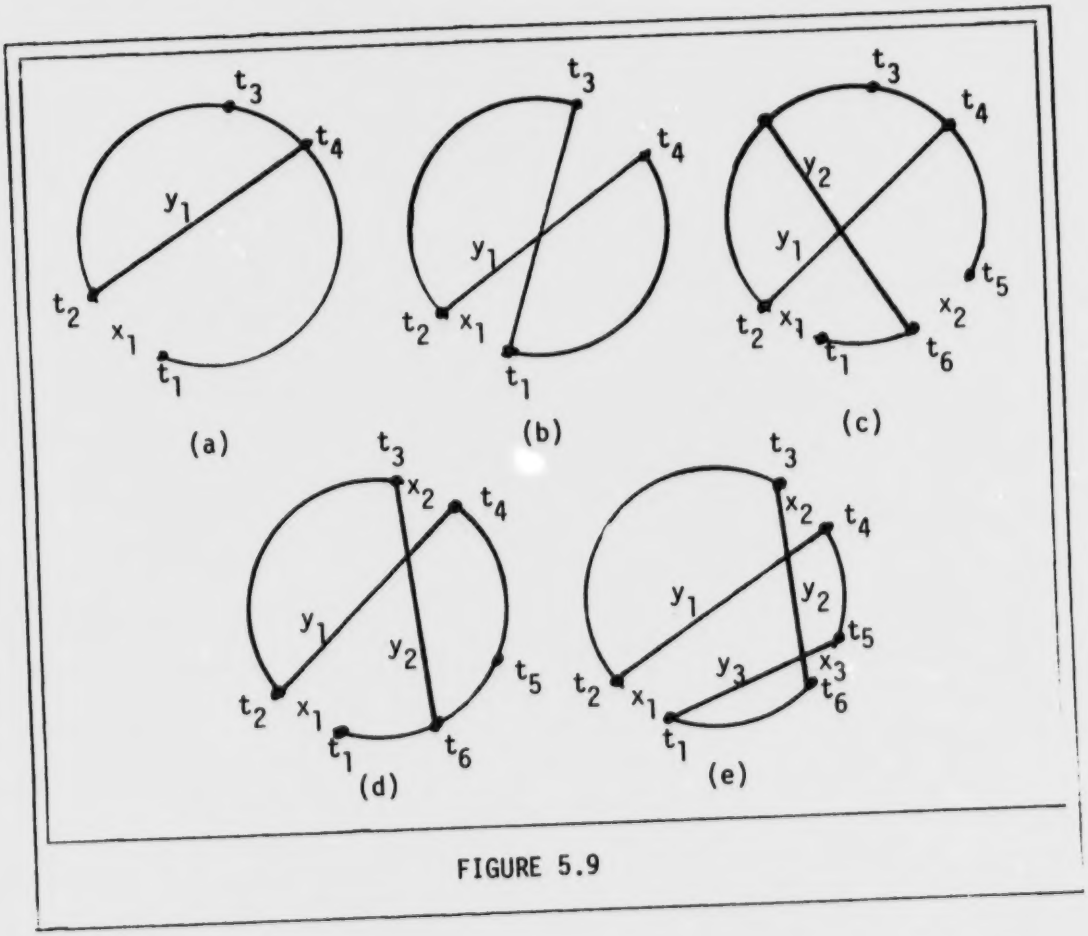


FIGURE 5.9

En (a), l'échange x_1 pour y_1 ne produit pas un tour connexe mais il peut facilement le devenir en effectuant l'échange (t_3,t_4) pour (t_1,t_3) et obtenir (b). C'est en ce sens que l'échange x_1 pour y_1 est autorisé. Si de (a) on procède à un deuxième échange, il doit lui aussi être réalisable. (c) illustre un deuxième échange qui n'est pas valide. De fait, pour qu'il soit valide x_2 doit être (t_3,t_4) et (d) illustre un tel échange où le résultat est rendu réalisable en éliminant (t_5,t_6) au profit de (t_1,t_5), résultant en (e).

Le seul fait d'exiger cette réalisabilité suffit à compromettre nos chances d'atteindre l'optimum à coup sûr. Dans la suite d'échanges $x_{i_1},y_{i_1},\ldots,x_{i_k},y_{i_k}$ qui conduit de T à T* et où $\sum_{j=1}^{r} g_{i_j} > 0$, pour tout $r = 1,\ldots,k$, il est possible que l'on ne puisse satisfaire le critère de réalisabilité à chaque étape r.

La figure 5.10 en donne un exemple. Si 5.10 (a) représente T et 5.10 (b) T* et que les deux tours ne diffèrent qu'en x_i,y_i, $i = 1,2,3,4$, alors on ne peut pas renuméroter les indices i de telle

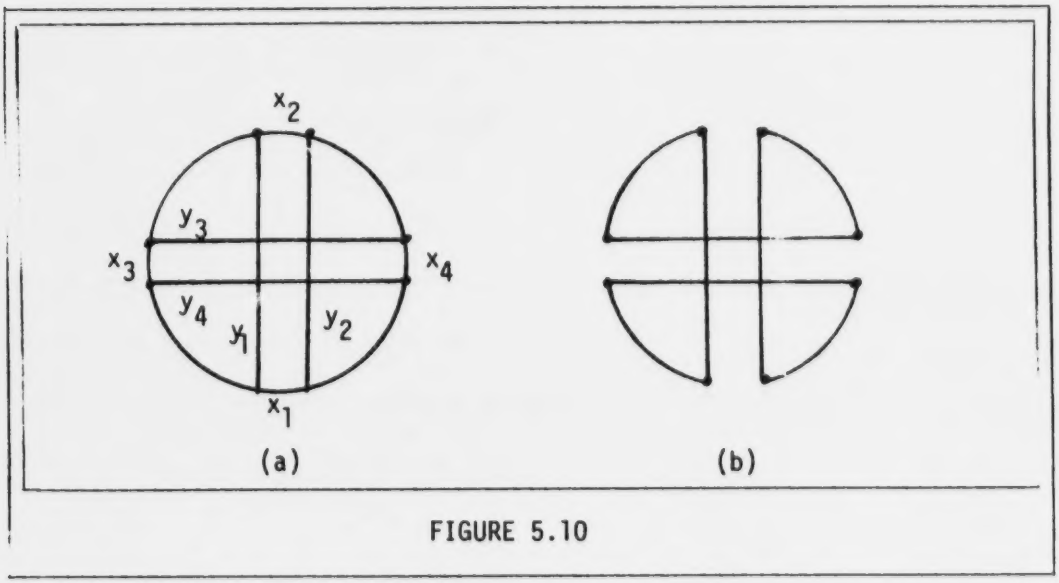


FIGURE 5.10

sorte que suite à chaque échange le tour soit réalisable. Si on effectuait par exemple les échanges x_1,y_1 et x_2,y_2 on obtiendrait la figure 5.11 qui n'est pas un tour et qui ne peut le devenir par un simple échange, tel que décrit à la figure 5.9.

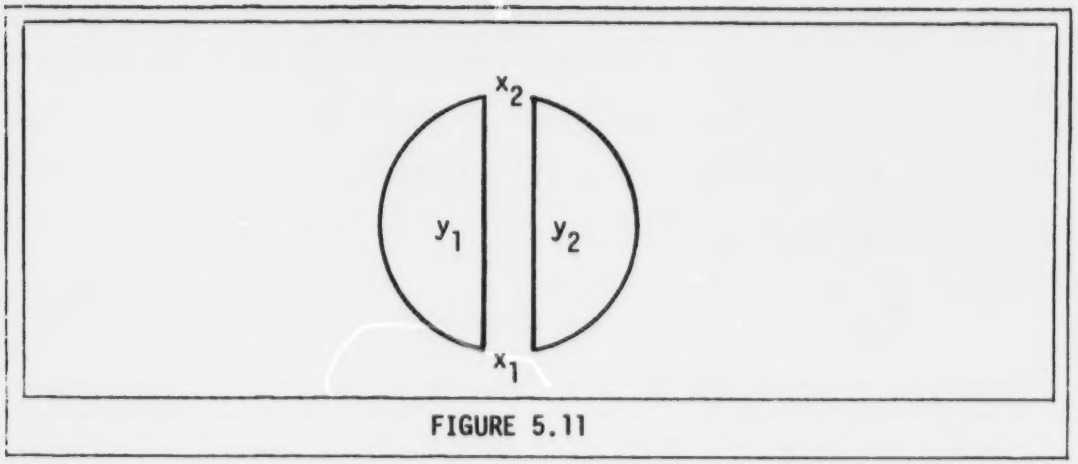


FIGURE 5.11

Les remarques faites jusqu'à présent sur la technique du r-OPT . se plaçaient surtout dans le contexte du problème du voyageur de commerce. Le problème que nous avons à résoudre a une structure plus complexe. Lorsque nous envisagerons un échange il faudra non seulement s'assurer que le tour demeure réalisable au sens décrit plus tôt, mais qu'il respecte les contraintes de capacité et de temps de chaque boucle, en plus de la contrainte (5.12) liant les boucles d'un même chauffeur. Nous énonçons maintenant l'algorithme du r-OPT adapté à notre problème. Il ne restera plus par la suite qu'à préciser le calcul de l'estimé ΔPA de l'effet d'un échange sur l'objectif.

L'algorithme procède par itérations et, à l'intérieur de chacune d'elles, par phases. Au début de chaque itération m nous avons un tour de départ $T^{(m)}$ issu de l'itération précédente. Nous fixons ensuite un point p de $T^{(m)}$ qui détermine le premier arc x_1 éliminé. La phase 1 associée à p détermine le meilleur arc y_1 à échanger avec x_1 , et détermine par le fait même x_2 le prochain arc éliminé.

De même, au cours de la phase 2 associée à p nous réalisons un échange d'arcs x_2 pour y_2. Nous poursuivons ainsi les échanges d'un arc x_i pour un arc y_i aussi longtemps que le gain global reste positif (avec certaines limites tout de même). La phase retenue pour p est celle ayant procurée le meilleur résultat. Nous reprenons les mêmes opérations pour différents points de départ p. Celui procurant la meilleure solution détermine le tour $T^{(m+1)}$ du début de la prochaine itération.

NOTATION:

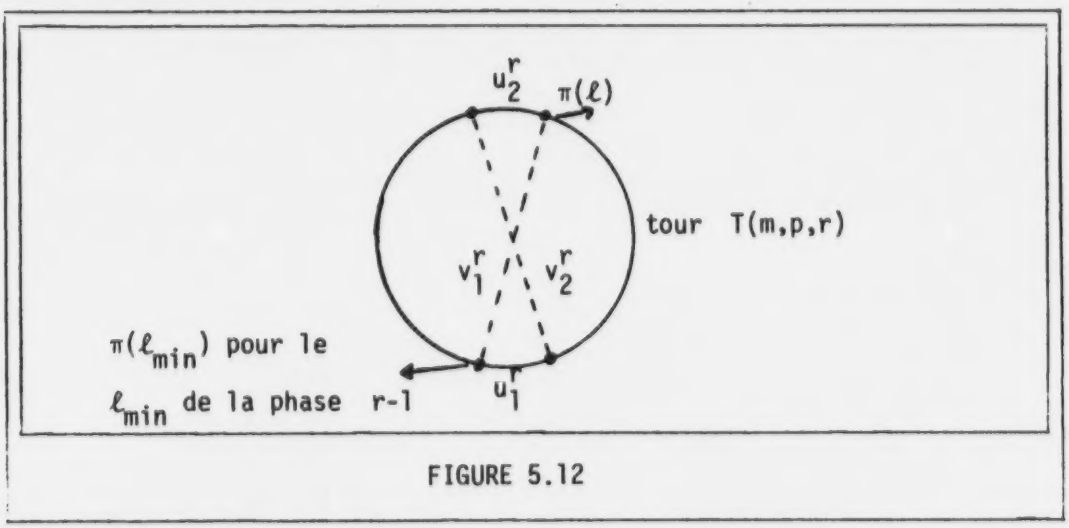


FIGURE 5.12

$F(m,p,r)$: valeur <u>exacte</u> de l'objectif à la fin de la $r^{ième}$ phase de l'itération m lorsque le premier arct éliminé est $(\pi(p),\pi(p+1))$,

$$F(m,p,r^*) := \min_r F(m,p,r) ,$$

$$F(m,p^*,r^*) := \min_p F(m,p,r^*) ,$$

π : c'est le vecteur mémorisant le tour courant. $\pi(\ell)$ est le $\ell^{\text{ième}}$ point du tour courant. C'est un client si $\pi(\ell) = 1,\ldots,n$ et c'est le dépot si $\pi(\ell) = 0$,

ℓ_{min} : indice ℓ qui a procuré l'échange estimé le plus profitable dans une phase, i.e. pour m,p et r fixes,

$u_1^r, u_2^r, v_1^r, v_2^r$: pour m,p et r fixes, un ℓ donné correspond à la tentative d'éliminer à la figure (5.14) l'arc u_1^r et d'ajouter l'arc v_1^r alors que u_2^r et v_2^r sont les seuls arcs pouvant être respectivement éliminé et ajouté pour rendre le tour réalisable ,

m : indice d'itération,

n : dimension du vecteur π ,

p : indice de la position du client déterminant le premier arc éliminé pour une itération donnée i.e. $u_1^1 = (\pi(p),\pi(p+1))$,

r : indice de phase, il correspond au r variable de l'algorithme r-OPT ,

T(m) : $\triangleq$ T(m,p,0) pour tout p . C'est le tour au début de l'itération m ,

T(m,p,r) : c'est le tour au début de la $r+1^{\text{ième}}$ phase de la $m^{\text{ième}}$ itération lorsque le 1^{er} arc éliminé est $(\pi(p),\pi(p+1))$,

$T(m,p,r^*)$: c'est le tour correspondant à $F(m,p,r^*)$,

$T(m,p^*,r^*)$: c'est le tour correspondant à $F(m,p^*,r^*)$,

TEMCUM (b) : temps total de parcours de la boucle b ; TEMCUM (0,C) est le temps total de parcours de toutes les boucles du chauffeur C ,

$X(m,p,r)$: meilleure valeur estimée courante de la fonction économique au cours de la $r^{ième}$ phase de l'itération m où le client p détermine le premier arc éliminé,

$|u|$: temps de parcours de l'arc u ,

$\Delta PA(k_1,k_2,J_1,J_2)$: estimé de l'effet de l'échange entre les boucles k_1 et k_2 lorsque J_1 et J_2 sont respectivement les ensembles de clients passant de k_1 à k_2 et de k_2 à k_1 .

L'algorithme

$F(1,1,0)$ = valeur de l'objectif au début du r-OPT

$m = 1$

0 $p = 1$

$F(m,p^*,r^*) = \infty$

1 $\ell = \ell_{min} = r = 1$

$X(m,p,1) = F(m,p,r^*) = \infty$

$u_1^1 = (\pi(p),\pi(p+1))$

aller à 3

2 $\ell = \ell_{min} = 1$

$X(m,p,r) = \infty$

$u_1^r = v_2^{r-1}$ i.e. que le premier arc enlevé en cette phase r est le dernier arc ajouté à la phase précédente. On se souviendra que v_2^{r-1} ne servait qu'à rendre le tour réalisable et ne faisait pas partie de la suite des arcs échangés

3 ajouter l'arc $(u_1^r(1),\pi(\ell))$ si cet arc n'a pas déjà été effacé à une phase antérieure

sinon aller à 5

($u_1^r(1)$ est la première extrémité de l'arc u_1^r)

rendre le tour réalisable en ajoutant v_2^r et en enlevant u_2^r (ils sont uniquement déterminés). Mais si u_2^r a déjà été enlevé dans cette phase ou v_2^r déjà ajouté alors aller à 5

4 identifier les deux boucles k_1 (pour $u_1^r(1)$) et k_2 (pour $u_2^r(1)$) en présence

$DELTAT = |v_1^r|+|v_2^r|-|u_1^r|-|u_2^r|$

Si $k_1 = k_2$ alors puisque tous les clients échangés font partie de la même boucle, un seul cas est possible: tous restent dans la boucle $k_1 = k_2$

Si TEMCUM(0,C) + DELTAT > H aller à 5

Sinon, si k_1 et k_2 sont deux(2) boucles du même chauffeur alors tous les clients échangés demeurent desservis par le même chauffeur et il importe peu de savoir quelle boucle devient k_1 et laquelle devient k_2 . Si TEMCUM(O,C)+DELTAT > H aller à 5.

Sinon (k_1 et k_2 sont desservis par deux chauffeurs différents) deux cas sont possibles, illustrés par la figure ci-dessous

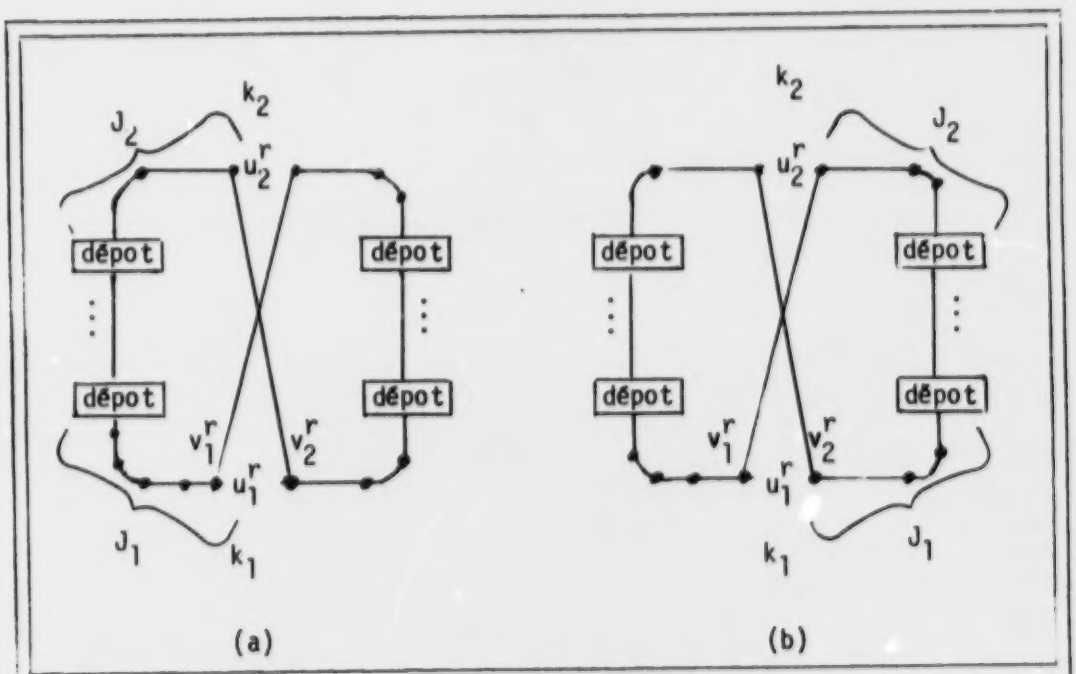


FIGURE 5.13

Qu'il y ait un ou deux cas possibles, nous ne conservons que celui ayant le meilleur gain estimé X , où

$$X = F(m,p,r-1)+\Delta\ PA(k_1,k_2,J_1,J_2) .$$

Si $X < X(m,p,r)$ alors

$\ell_{min} = \ell$

$X(m,p,r) = X$

5 Si $\ell < n$ alors

$\ell = \ell+1$

aller à 3

sinon $T(m,p,r)$ est le tour résultant du choix de $\ell = \ell_{min}$.

Si $X(m,p,r) \geq F(m,p,r^*)$ alors COMPTEUR = COMPTEUR+1 .

Si $X(m,p,r) \geq F(1,1,0)$ ou COMPTEUR ≥ 2 aller à 6.

Sinon, recouvrer la solution optimale $F(m,p,r)$ associée $T(m,p,r)$ à partir des solutions optimales des problèmes (PA) résolus précédemment.

Si $F(m,p,r) < F(m,p,r^*)$ alors

$F(m,p,r^*) = F(m,p,r)$

$T(m,p,r^*) = T(m,p,r)$

$r = r+1$

aller à 2

Sinon COMPTE = COMPTE+1

si COMPTE ≥ 3 alors

6 Si $F(m,p,r^*) < F(m,p^*,r^*)$ alors

$F(m,p^*,r^*) = F(m,p,r^*)$

$T(m,p^*,r^*) = T(m,p,r^*)$

si $p < n-1$ alors

$p = p+1$

aller à 1

Sinon, si $F(m,p^*,r^*) < F(m-1,p^*,r^*)$ alors appliquer l'algorithme d'AJOUT à $T(m,p^*,r^*)$ et le résultat devient $T(m+1)$ et $F(m,p^*,r^*)$ devient la valeur produite par AJOUT, ainsi que $F(1,1,0)$

$m = m+1$

aller à 0

sinon FIN de l'algorithme

sinon $r = r+1$

aller à 2

REMARQUES:

- COMPTEUR et COMPTE servent à limiter le nombre de fois où le gain local est négatif. On espère ainsi accélérer l'exécution en évitant des directions de recherche qui pourraient s'avérer infructueuses,
- dans le même ordre d'idée, la version implantée n'examine pas tous les p possibles, mais seulement trois,
- tout comme pour l'ajout, nous ne considérons pas d'échanges qui une fois réalisés diminuent la borne de capacité d'une boucle à moins de 40% des quantités livrées à ces clients avant l'échange. On réduit ainsi les efforts inutiles.

Calcul de Δ PA(k_1,k_2,J_1,J_2)

L'algorithme indique que les échanges n'impliquent toujours qu'au plus deux(2) boucles à la fois. Supposons que pour toute boucle k, (PA) soit résolu (notons par $(PA)_k$ chacun d'eux) et que la solution optimale w^* et les multiplicateurs μ,ν soient connus. Nous désirons maintenant estimer les conséquences d'un échange entre deux(2) boucles k_1 et k_2. La fonction économique est constituée de deux termes indépendants: $\sum d_{ij}x_{ijk}$ et $\sum EC_i(w_i)$. L'effet sur le premier terme est simple à établir: c'est le DELTAT de l'algorithme et c'en est l'effet exact. Il reste à estimer l'effet sur le deuxième terme.

1er cas: k_1 et k_2 sont parcourues par deux(2) chauffeurs différents. Soient J_1 et J_2 les clients respectifs de k_1 et k_2 qui changent de boucle tel qu'illustré par la figure 5.14:

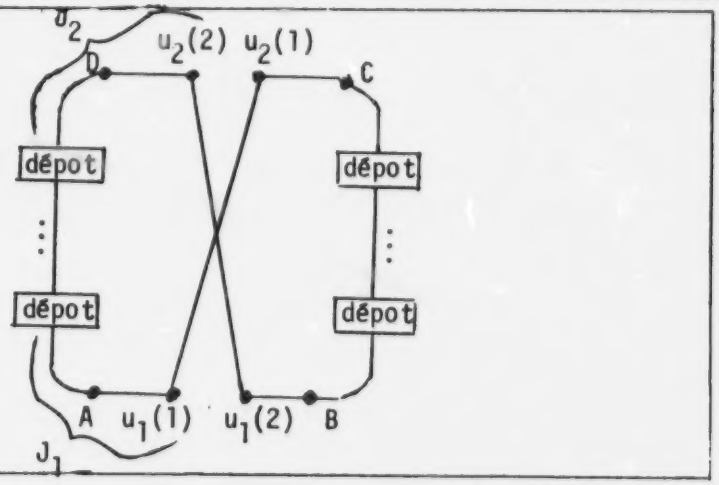


FIGURE 5.14

Soient Y_{k_1} et Y_{k_2} les ensembles des clients de k_1 et k_2 avant l'échange, et Y'_{k_1} , Y'_{k_2} ceux suite à l'échange. Afin de simplifier le calcul de Δ PA , nous allons disséquer le passage de la situation initiale à la situation finale, en trois étapes. Au départ nous avons les problèmes $(PA)_{k_1}$ et $(PA)_{k_2}$ résolus. Nous les réunissons en (PA^1) :

$$\text{Min} \sum_{Y_{k_1} \cup Y_{k_2}} EC_i(w_i)$$

s.à

		Var. duales
(PA^1)	$\sum_{Y_{k_1}} w_i \leq b_{k_1}$	μ_{k_1}
	$\sum_{Y_{k_2}} w_i \leq b_{k_2}$	μ_{k_2}
	$0 \leq w_i \leq QTEMAX_i$, $i \in Y_{k_1} \cup Y_{k_2}$	ν_i

où b_{k_1} représente la quantité maximale pouvant être livrée sur la boucle k_1 en fixant toutes les autres boucles du même chauffeur (à la fois au niveau des quantités livrées qu'au niveau de l'ordre de livraison) ainsi que l'ordre de visite des clients de k_1 . b_{k_2} a la même signification pour k_2 et le détail des calculs de b_{k_1} et b_{k_2} est fait à la section 5.3.3.4. Définissons maintenant (PA^2) , (PA^3) et (PA^4) , où (PA^4) correspond à la situation finale suite à l'échange.

$$\text{Min} \sum_{Y'_{k_1} \cup Y'_{k_2}} EC_i(w_i)$$

s.a

Var. duales

(PA^2)

$$\sum_{Y'_{k_1}} w_i \leq b_{k_1} - \sum_{J_1} w_i^* + \sum_{J_2} w_i' \qquad \mu_{k_1}$$

$$\sum_{Y'_{k_2}} w_i \leq b_{k_2} - \sum_{J_2} w_i^* + \sum_{J_1} w_i' \qquad \mu_{k_2}$$

$$w_i \leq QTEMAX_i + (w_i' - QTEMAX_i) \;,\; i \in J_1 \cup J_2 \qquad \nu_i$$

$$w_i \leq QTEMAX_i \;,\; i \notin J_1 \cup J_2 \qquad \nu_i$$

$$w_i \geq 0 \;,\; i \in Y'_{k_1} \cup Y'_{k_2}$$

$$\text{Min} \sum_{Y'_{k_1} \cup Y'_{k_2}} EC_i(w_i)$$

s.a

(PA^3)

$$\sum_{Y'_{k_1}} w_i \leq b'_{k_1}$$

$$\sum_{Y'_{k_2}} w_i \leq b'_{k_2}$$

$$0 \leq w_i \leq QTEMAX_i \;,\; i \in Y'_{k_1} \cup Y'_{k_2}$$

$$\text{Min} \sum_{Y'_{k_1} \cup Y'_{k_2}} \overline{EC_i}\,(w'_i)$$

s.à

$$(PA^4) \qquad \sum_{Y'_{k_1}} w_i \leq b'_{k_1}$$

$$\sum_{Y'_{k_2}} w_i \leq b'_{k_2}$$

$$0 \leq w_i \leq QTEMAX_i \;,\; i \in Y'_{k_1} \cup Y'_{k_2}$$

où b'_{k_1} et b'_{k_2} sont les équivalents de b_{k_1} , b_{k_2} mais après l'échange, et w' la solution optimale de (PA^2) , et finalement $\overline{EC_i}$ est définie comme suit:

$$\overline{EC_i}(w_i) = A\mu_i/w_i \; [K_i F_{ik}(w_i) + \overline{CT_i}(1-F_{ik}(w_i))]$$

où $\overline{CT_i}$ est le coût de transport suite à l'échange.

Seuls les quatre points $u_1(1)$, $u_1(2)$, $u_2(1)$, $u_2(2)$ (et moins si certains d'entre eux sont le dépot) voient le terme "détour" de leur coût de transport modifié en raison de l'échange.

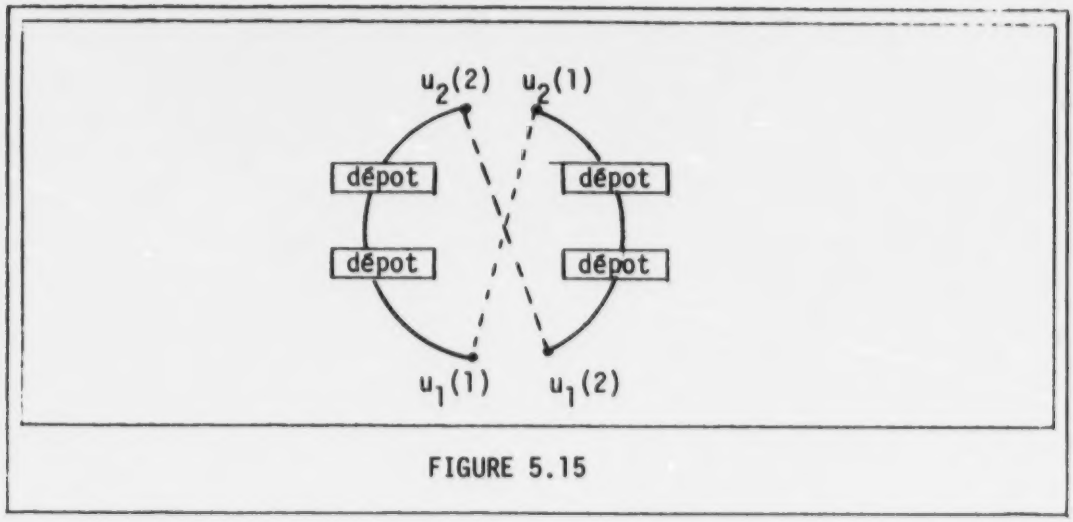


FIGURE 5.15

Le passage de (PA^1) à (PA^2)

THÉORÈME 5.5: Si w^* est la solution optimale de (PA^1) avec les multiplicateurs optimaux μ et ν, alors w' est solution optimale de (PA^2) avec les mêmes multiplicateurs optimaux μ et ν, où

$$w_i' = \begin{cases} (EC_i')^{-1}(-(\mu_{k_j}+\nu_i)) & \text{si } i \in (J_1 \cup J_2) \cap Y'_{k_j}, \ j = 1,2 \\ w_i^* & \text{sinon .} \end{cases}$$

NOTE: Une telle définition de w' est permise. En effet, EC est strictement convexe de classe C' et définie sur $[0,r_i]$, alors EC_i' est strictement croissante et définie sur $[0,r_i]$ et $(EC_i')^{-1}$ est strictement croissante et définie sur $X = (-\infty = EC_i'(0^+), EC_i'(r_i)]$ et $(EC_i')^{-1}(x) \in (0,r_i)$, $x \in X$. Par conséquent, si $-(\mu_k+\nu_i) \in X$ nous avons $w_i' \geq 0$. Quant à savoir si $-(\mu_k+\nu_i) \in X$, il faut consulter la condition de K-T (5.45) ci-dessous, associé à (PA^1), qui assure

$EC_i'(w_i^*) \geq -(\mu_k+\nu_i)$. $(EC_i')^{-1}$ est définie en $EC_i'(w_i^*)$ et toutes les valeurs inférieures car X n'est pas borné inférieurement $(EC_i')^{-1}(-(\mu_k+\nu_i))$ existe donc et est positif.

PREUVE: w^*,μ et ν respectent les conditions de K-T associées à (PA^1), i.e.

$$EC_i'(w_i^*) \geq -(\mu_k+\nu_i)\,,\ i \in Y_{k_1} \cup Y_{k_2}\,,\ \text{où}\ k = \begin{cases} k_1 & \text{si } i \in Y_{k_1} \\ k_2 & \text{si } i \in Y_{k_2} \end{cases} \tag{5.45}$$

$$\mu_k = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{Y_k} w_i^* = b_k\,,\ k = k_1,k_2 \tag{5.46}$$

$$\nu_i = 0 \quad \text{ou} \quad w_i^* = QTEMAX_i\,,\ i \in Y_{k_1} \cup Y_{k_2} \tag{5.47}$$

$$EC_i'(w_i^*) = -(\mu_k+\nu_i) \quad \text{ou} \quad w_i^* = 0\,,\ i \in Y_{k_1} \cup Y_{k_2}\,,\ k = \begin{cases} k_1 & \text{si } i \in Y_{k_1} \\ k_2 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.48}$$

$$\sum_{Y_k} w_i^* \leq b_k\,,\ k = k_1,k_2 \tag{5.49}$$

$$w_i^* \leq QTEMAX_i\,,\ i \in Y_{k_1} \cup Y_{k_2} \tag{5.50}$$

$$w_i^* \geq 0\,,\ i \in Y_{k_1} \cup Y_{k_2} \tag{5.51}$$

$$\mu_k,\nu_i \geq 0\,,\ k = k_1,k_2\,,\ i \in Y_{k_1} \cup Y_{k_2}\,. \tag{5.52}$$

(PA^2) est un problème de programmation convexe et pour compléter la preuve il suffit de montrer que (w',μ,ν) satisfait les conditions de K-T associées à (PA^2) et qui sont:

$$EC_i'(w_i') \geq -(\mu_k+\nu_i) \ , \ i \in Y'_{k_1} \cup Y'_{k_2} \ , \ k = \begin{cases} k_1 & \text{si } i \in y'_{k_1} \\ k_2 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.53}$$

$$\mu_{k_1} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{Y'_{k_1}} w_i' = b_{k_1} - \sum_{J_1} w_i^* + \sum_{J_2} w_i' \tag{5.54}$$

$$\mu_{k_2} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{Y'_{k_2}} w_i' = b_{k_2} - \sum_{J_2} w_i^* + \sum_{J_1} w_i' \tag{5.55}$$

$$\nu_i = 0 \quad \text{ou} \quad w_i' = QTEMAX_i + (w_i'-QTEMAX_i) \ , \ i \in J_1 \cup J_2 \tag{5.56}$$

$$\nu_i = 0 \quad \text{ou} \quad w_i' = QTEMAX_i \ , \ i \notin J_1 \cup J_2 \tag{5.57}$$

$$EC_i'(w_i') = -(\mu_k+\nu_i) \quad \text{ou} \quad w_i' = 0 \ , \ i \in Y'_{k_1} \cup Y'_{k_2} \ , \ k = \begin{cases} k_1 & \text{si } i \in Y'_{k_1} \\ k_2 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.58}$$

$$\sum_{Y'_{k_1}} w_i' \leq b_{k_1} - \sum_{J_1} w_i^* + \sum_{J_2} w_i' \tag{5.59}$$

$$\sum_{Y'_{k_2}} w_i' \leq b_{k_2} - \sum_{J_2} w_i^* + \sum_{J_1} w_i' \tag{5.60}$$

$$w_i' \leq QTEMAX_i + (w_i'-QTEMAX_i) \ , \ i \in J_1 \cup J_2 \tag{5.61}$$

$$w_i' \leq QTEMAX_i \ , \ i \notin J_1 \cup J_2 \tag{5.62}$$

$$w'_i \geq 0 \ , \ i \in Y'_{k_1} \cup Y'_{k_2} \tag{5.63}$$

$$\mu_k, \nu_i \geq 0 \ , \ k = k_1, k_2 \ , \ i \in Y'_{k_1} \cup Y'_{k_2} \ . \tag{5.64}$$

Vérifions chacune des conditions (5.53)-(5.64):

(5.53): si $i \notin J_1 \cup J_2$ alors $w'_i = w^*_i$ et i reste dans la même boucle de sorte que (5.53) est vérifié par (5.45); sinon, w'_i est justement défini pour que (5.53) soit vérifié,

(5.54): (5.54) $\equiv \mu_{k_1} = 0$ ou $\sum_{Y'_{k_1}} w'_i + \sum_{J_1} w^*_i - \sum_{J_2} w'_i = b_{k_1}$

$$\equiv \mu_{k_1} = 0 \text{ ou } \sum_{J_1} w^*_i + \sum_{Y_{k_1} - J_1} w'_i = b_{k_1}$$

mais par définition de w' , $w'_i = w^*_i$ si $i \in Y_{k_1} - J_1$ et (5.54) devient $\mu_{k_1} = 0$ ou $\sum_{Y_{k_1}} w^*_i = b_{k_1}$ ce qui est vérifié par (5.46),

(5.55): même raisonnement qu'en (5.54) mais pour k_2 ,

(5.56): (5.56) $\equiv \nu_i = 0$ ou $w'_i = w'_i$, ce qui est trivialement vérifié,

(5.57): si $i \notin J_1 \cup J_2$ alors $w'_i = w^*_i$ et (5.57) est vérifié par (5.47),

(5.58): si $i \notin J_1 \cup J_2$ alors $w'_i = w^*_i$ et i reste dans la même boucle, donc (5.58) est vérifié par (5.48) sinon w'_i est défini de telle sorte que $w'_i = (EC'_i)^{-1}(-(\mu_k + \nu_i))$, i.e. $EC'_i(w'_i) = -(\mu_k + \nu_i)$ et (5.58) est vérifié,

(5.59): par le raisonnement fait pour (5.54) on a

$$(5.59) \equiv \sum_{Y_{k_1}} w_i^* \leq b_{k_1} \quad \text{ce qui est vérifié par (5.49)},$$

(5.60): même preuve qu'en (5.59) mais pour k_2,

(5.61): $(5.61) \equiv w_i' \leq w_i'$ ce qui est vrai,

(5.62): si $i \notin J_1 \cup J_2$ alors $w_i' = w_i^*$ et (5.62) est vérifié par (5.50),

(5.63): si $i \notin J_1 \cup J_2$ alors $w_i' = w_i^*$ et $w_i^* \geq 0$ par (5.51); sinon w_i' est défini afin que $w_i' \geq 0$ (voir la note),

(5.64): vérifié par (5.52), C.Q.F.D.

Le théorème précédent nous fournit explicitement la solution optimale de (PA^2) à partir de celle de (PA^1). La variation de la fonction économique optimale de (PA^1) à (PA^2) est donc de

$$\sum_{Y_{k_1} \cup Y_{k_2}} EC_i(w_i') - \sum_{Y_{k_1} \cup Y_{k_2}} EC_i(w_i^*) = \sum_{J_1 \cup J_2} EC_i(w_i') + \sum_{Y_{k_1} \cup Y_{k_2} - (J_1 \cup J_2)} EC_i(w_i^*)$$

$$- \sum_{J_1 \cup J_2} EC_i(w_i^*) - \sum_{Y_{k_1} \cup Y_{k_2} - (J_1 \cup J_2)} EC_i(w_i^*)$$

$$= \sum_{J_1 \cup J_2} [EC_i(w_i') - EC_i(w_i^*)] . \qquad (5.65)$$

Le passage de (PA^2) à (PA^3)

Ces deux problèmes ne diffèrent que par leur membre de droite. Les problèmes étant convexes et (μ,ν) étant un vecteur de multiplicateurs

optimaux pour (PA^2) alors $-(\mu,\nu)$ est un sous-gradient de la fonction de perturbation V au point zéro. En d'autres termes, si

$$V(y) = \text{Min} \sum_{Y_{k_1} \cup Y_{k_2}} EC_i(w_i)$$

s.à.

$$\sum_{Y_{k_1}} w_i - (b_{k_1} - \sum_{J_1} w_i^* + \sum_{J_2} w_i') \leq y_1$$

$$\sum_{Y'_{k_2}} w_i - (b_{k_2} - \sum_{J_2} w_i^* + \sum_{J_1} w_i') \leq y_2$$

$$w_i - (QTEMAX_i + (w_i' - QTEMAX_i)) \leq y_{i+2} \ , \ i \in J_1 \cup J_2$$

$$w_i - QTEMAX_i \leq y_{i+2} \ , \ i \notin J_1 \cup J_2$$

$$w_i \geq 0$$

alors $V(0)$ est la valeur optimale de (PA^2) et $V(y')$ est celle de (PA^3) , où

$$(y') = \begin{pmatrix} -(b_{k_1} - \sum_{J_1} w_i^* + \sum_{J_2} w_i') + b'_{k_1} \\ -(b_{k_2} - \sum_{J_2} w_i^* + \sum_{J_1} w_i') + b'_{k_2} \\ (-w_i' + QTEMAX_i)_{i \in J_1 \cup J_2} \\ (0)_{i \notin J_1 \cup J_2} \end{pmatrix}$$

(on suppose que les clients de $J_1 \cup J_2$ portent les $|J_1|+|J_2|$ premiers indices). Par définition de sous-gradient nous avons:

$$V(y') \geq V(0)+(-\mu_{k_1},-\mu_{k_2},-(\nu_i)_{i\in Y_{k_1}\cup Y_{k_2}})^T(y'-0)$$

$$\equiv V(y')-V(0) \geq \mu_{k_1}(b_{k_1}-\sum_{J_1} w_i^*+\sum_{J_2} w_i'-b'_{k_1})$$

$$+ \mu_{k_2}(b_{k_2}-\sum_{J_2} w_i^*+\sum_{J_1} w_i'-b'_{k_2})$$

$$+ \sum_{i\in J_1\cup J_2} \nu_i(w_i'-QTEMAX_i) \; . \qquad (5.66)$$

En combinant (5.65) et (5.66), le gain maximum en passant de (PA^1) à (PA^3) est de

$$\sum_{J_1\cup J_2} [EC_i(w_i')-EC_i(w_i^*)+\nu_i(w_i'-QTEMAX_i)]+\mu_{k_1}[b_{k_1}-\sum_{J_1} w_i^*+\sum_{J_2} w_i'-b'_{k_1}]$$

$$+\mu_{k_2}[b_{k_2}-\sum_{J_2} w_i^*+\sum_{J_1} w_i'-b'_{k_2}] \qquad (5.67)$$

Le passage de (PA^3) à (PA^4)

Ces deux problèmes ne diffèrent que par leur fonction économique, et ce en au plus quatre éléments de $\sum_{Y_{k_1}\cup Y_{k_2}} EC_i(w_i)$. Nous cherchions à obtenir ici aussi une borne supérieure sur le gain réalisable mais nous n'avons rien obtenu de satisfaisant. Nous nous sommes contentés, pour le passage de (PA^1) à (PA^4) de (5.67) qui n'est plus une borne, mais simplement un estimé.

Autres cas

1) Si $k_1 = k_2$ alors b_{k_1} ne change pas, $J_1 = J_2 = \phi$ et

$\Delta PA = DELTAT + \mu_{k_1}(b_{k_1} - b'_{k_1})$,

2) si k_1 et k_2 sont deux boucles différentes mais couvertes par le même chauffeur alors nous procédons comme dans le premier cas, sauf que b'_{k_1} et b'_{k_2} sont déterminés de manière particulière, tel que décrit à la section 5.3.3.4,

3) dans le cas d'un AJOUT, on désire ajouter un client, disons $i = n+1$, à la boucle k . Une seule boucle est affectée de sorte que $J_1 = \phi$, $J_2 = \{n+1\}$ et ΔPA devient

$DELTAT + EC_{n+1}(w'_{n+1}) - EC_{n+1}(0) + \mu_k[b_k + w'_{n+1} - b'_k]$.

CHAPITRE VI

LES RÉSULTATS

Nous présentons maintenant des résultats préliminaires pour les deux approches proposées. Ces résultats sont le fruit de simulations portant sur une même période, soit du 8 décembre 1982 au 21 janvier 1983. Ces quarante-cinq(45) jours constituent la période la plus froide que nous ayons à notre disposition. Le nombre moyen quotidien de degrés-jour est de 27.4. Cela signifie que pour un taux de consommation moyen de 0.95 ℓ/DJ $35(\cong \frac{909}{0.95\times 27.4})$ jours suffisent à complètement vider un réservoir de 909 litres. Le graphe des degrés-jour apparaît à la figure 6.1.

Il serait malhonnête de porter un jugement définitif à partir de ces seuls résultats. Nous avons simplement voulu produire un exemple du comportement de chaque algorithme.

VI.1 LA PREMIÈRE APPROCHE AVEC QUATRE(4) VÉHICULES

La première simulation s'est en fait déroulée avec cinq(5) véhicules. Il est vite apparu que ce nombre était plus que suffisant et nous avons interrompu la simulation. Les résultats avec quatre véhicules apparaissent au tableau 6.2. On constate tout d'abord que cela fut suffisant puisqu'aucune pénurie ne fut enregistrée. La colonne E* indique le nombre de clients dont la probabilité de pénurie jusqu'à la fin du jour J+2 excède le seuil de 0.0008 . C'est donc le nombre de clients qui auraient

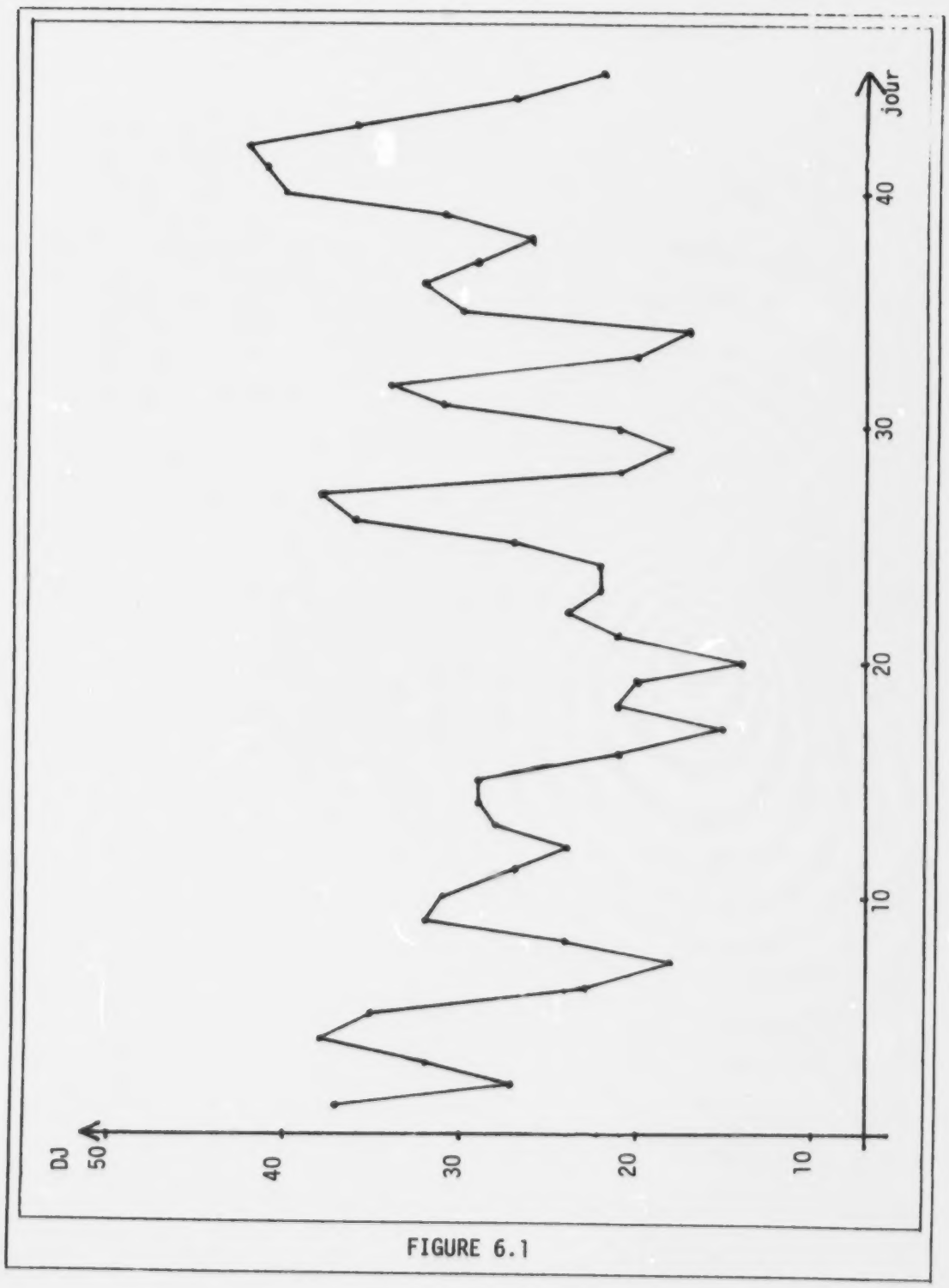


FIGURE 6.1

Résultats de la simulation

Jour	DJ	1ère approche: 4 véhicules			1ère approche: 3 véhicules			2ème approche: 3 véhicules		
		clients visités	E*	pénuries	clients visités	E*	pénuries	clients visités	N_o	pénuries
1	37	4			4			74	0	
2	27	75			75			77	0	
3	32	104	120		75	120		84	19	
4	38	88			76	117		87	60	
5	35	59			76	100		93	57	
6	23	92			75	117		82	65	
7	18	101	121		73	163		91	54	
8	24	99	147		70	217		90	61	
9	32	101	151		73	253		91	152	
10	31	95	145		75	271		93	240	
11	27	101	134		72	320		96	366	4
12	24	98	169		73	271		91	461	8
13	28	101	193		70	293		100	622	29
14	29	98	155		73	328	1	100	733	52
15	29	95	112		78	394	5	98	825	98
16	21	90	91		76	376	1	90	788	53
17	15	97	98		74	318		94	789	20
18	21	61			74	274		89	861	20
19	20	83			71	261		101	942	49
20	14	87			71	289		93	921	36
21	21	81			69	275		90	978	65
22	24	96	99		72	307		90	1070	78
23	22	98			79	350	1	93	1069	88
24	22	101	126		74	366		99	1061	89
25	27	99	177		77	394	5	104	1073	137
26	36	101	153		81	464	13	87	1451	146
27	38	101	130		82	564	25	96	1104	183
28	21	96	100		83	578	22	102	956	74
29	18	101	123		80	479	6	99	894	56
30	21	98	137		73	389	4	85	863	58
31	31	97	100		80	429	6	87	876	68
32	34	50			80	505	24	99	892	117
33	20	101	123		82	488	16	97	783	46
34	17	99	124		73	407	9	90	703	37
35	30	99	109		76	372	8	88	711	42
36	32	75			76	434	18	103	730	54
37	29	98	110		79	461	20	90	735	54
38	26	100	153		78	423	11	87	758	39
39	31	100	199		77	416	15	83	790	70
40	40	100	244		76	450	30	99	811	79
41	41	103	292		80	539	44	96	812	93
42	42	101	290		84	571	40	88	804	106
43	36	99	257		81	562	33	87	783	109
44	27	100	252		79	521	24	101	739	75
45	22	96	215		77	444	13	87	708	39
Total	1234	4118		0	3351		394	4141		2371
% moyen de livraison		86.2			92.3			21.0		
% de temps mort		9.32			3.46			0.00		
livraison moy. par jour		77,481ℓ			67,464ℓ			18,801ℓ		
distance parcourue par visite		2479 m			2166 m			2367 m		
temps d'exécution moyen		498 sec			535 sec			1130 sec		

FIGURE 6.2

été dans l'ensemble E des clients parmi lesquels on puise pour construire les routes du jour J , si la limite de deux cents(200) clients avait été éliminée. L'absence de cet item sur une ligne indique que ce nombre coïncide avec celui des clients visités de la colonne précédente. Ainsi le jour 2, 75 clients dépassaient le seuil de 0.0008 et tous furent visités. Le jour 3, par contre, 120 dépassaient le seuil mais seulement 104 reçurent une livraison.

Puisque la probabilité de pénurie utilisée pour définir l'ensemble E du jour J , s'étend jusqu'à la fin du jour J+2 , E* comprend en gros le nombre de clients urgents à servir pour les trois(3) prochains jours. D'autre part les résultats du tableau 6.2 indiquent que quatre véhicules peuvent servir un maximum de 100 à 103 clients par jour. C'est donc dire que tant que E* ne dépasse pas environ 3×100 = 300 clients (en autant que l'urgence à servir ces clients soit répartie assez uniformément sur les trois(3) jours) la flotte peut suffire à la tâche. Or la plus haute valeur atteinte par E* est de 292 pour le jour 41. En tout temps nous demeurons donc en deça des possibilités de la flotte. Le temps mort moyen (i.e. le pourcentage de temps inutilisé parmi les 32 heures de travail disponible chaque jour) assez élevé de 9.32% en est d'ailleurs le reflet.

Le pourcentage moyen de chaque livraison est le pourcentage de la capacité de son réservoir qu'a reçu chaque client en moyenne par livraison. Il est de 86.4%. Rappelons que chez l'entrepreneur que nous avions rencontré, un seuil critique uniforme à tous les clients d'environ 30% de la capacité du réservoir avait été établi. Cela signifie que l'on désire visiter un client dès que son réservoir atteint 30% de sa capacité, soit une

livraison de 70% seulement. Comparés aux 86.4% que nous avons obtenu, ils doivent visiter leurs clients plus souvent dans l'année pour déverser une même quantité de mazout. Il faut toutefois se souvenir que nous avons fait l'hypothèse d'un écart-type du taux de consommation quotidien uniforme et égal à 0.20 . Le 86.4% est fortement relié à cette hypothèse. S'il s'avérait que l'écart-type réel soit plus élevé, cela voudrait dire une variation plus grande dans le comportement du consommateur et pour s'en protéger, il faudrait moins espacer nos visites ce qui diminuerait le pourcentage moyen de chaque livraison.

VI.2 LA PREMIÈRE APPROCHE AVEC TROIS(3) VÉHICULES

Puisque quatre(4) véhicules ont suffi à la tâche, nous avons repris la même simulation mais avec un véhicule en moins, soit une réduction de 25% des effectifs. Les résultats du tableau 6.2 montrent que la réduction fut trop importante et 394 pénuries furent enregistrées. Avec trois(3) véhicules, le nombre maximum de clients que l'on visite chaque jour est d'environ 80. Lorsque E* dépasse 240 (= 3 jours × 80) donc, nous sommes en danger. C'est le cas à partir du neuvième jour et la température continuant d'être froide à ce moment le retard s'accumule pour finalement résulter en six(6) pénuries aux jours 14-16 . Par la suite, le temps s'adoucit mais pas assez pour nous permettre de récupérer et de passer sous la barre des 240. Lorsque le froid reprend et se maintient, l'inévitable se produit.

Il n'est pas surprenant de constater que le temps mort est moindre ici (3.46% vs 9.32%) puisqu'on doit constamment utiliser toutes les ressources disponibles. Si l'on exclut la première journée du calcul où seulement

quatre clients furent visités, le pourcentage de temps mort tombe à 1.27%. Ce dernier pourcentage est en quelque sorte inhérent à la première approche. Il est engendré par l'imposition que nous avons de devoir remplir complètement le réservoir d'un client visité. C'est en utilisant ce temps mort que devrait tabler la seconde approche pour améliorer les choses.

Enfin, le pourcentage moyen de chaque livraison est plus élevé que précédemment: 92.3% vs 86.4%. Cela est dû au retard accumulé par les trois véhicules de sorte qu'ils visitent de plus en plus tardivement les clients et donc doivent leur livrer un plus fort pourcentage de la capacité du réservoir.

VI.3 LA SECONDE APPROCHE AVEC TROIS(3) VÉHICULES

Là où la première approche avait faillie, peut-être la deuxième allait-elle réussir? Les résultats qui apparaissent au tableau 6.2 montrent que ce ne fut pas le cas, la seconde approche accumulant le nombre impressionnant de 2371 pénuries.

Au-delà de ce résultat désastreux, l'algorithme a répondu à plusieurs de nos attentes. Tout d'abord, et sauf pour la première journée, il n'y a eu aucun temps mort. Les vingt-quatre(24) heures de travail disponibles furent pleinement utilisées. Deuxièmement, la procédure décrite à la section 4.4 visant à équilibrer les jours de travail en allégeant ceux trop achalandés au profit de ceux moins occupés, a réussi dans la mesure des ressources disponibles. Le tableau 6.3 montre, pour les neuf(9) premiers jours simulés, la répartition des "meilleurs jours" des clients entrant dans l'horizon de

cinq(5) jours (ce sont les N_j , j=0,...,4 décrits à l'exemple de la section 4.4).

Jour	# de clients visités	Répartition des clients dont le meilleur jour de livraison survient dans l'horizon de cinq jours				
		N_0	N_1	N_2	N_3	N_4
1	74	0	3	74	156	142
2	77	0	39	120	142	84
3	84	19	64	141	84	72
4	87	60	80	87	72	94
5	93	57	83	72	94	154
6	82	65	58	104	172	152
7	91	54	96	176	162	161
8	90	61	181	171	175	140
9	91	152	179	189	155	172

TABLEAU 6.3

Dès le premier jour, alors qu'aucun client ne doit absolument être visité (N_0=0) on voit déjà poindre des embêtements pour les jours 4 (N_3=156) et 5 (N_4=142) où le nombre de clients à servir excède non seulement la limite de 78 qui permet de livrer à tous la quantité maximale, mais également la limite permettant de livrer quelque quantité que ce soit. La procédure mise en place a fait en sorte que dès le jour 1 plusieurs clients sont livrés pour réduire les problèmes anticipés aux jours 4 et 5 , et il en est de même pour les jours subséquents où on livre toujours plus de clients que ceux requis la journée même. Ainsi, de 156 au jour 1, le nombre à visiter

le jour 4 descend successivement à 120, 64 et enfin 60 le jour 4 même. Nous avons réussi à mieux répartir la tâche.

Cependant, les N_j des jours 8 et 9 laissent entrevoir des difficultés insurmontables. Malgré toute la bonne volonté de l'algorithme, nous n'avons plus aucune marge de manoeuvre et les excès de clients ne trouvent plus aucun jour creux pour les absorber. Dans ces circonstances, l'algorithme tend à visiter le plus grand nombre de clients possibles, même si cela signifie des livraisons minimes de 30 à 40 litres par client. La majeure partie des vingt-quatre(24) heures utilisées est par conséquent consacrée au transport proprement dit et au temps fixe de livraison. C'est pourquoi on ne livre plus en moyenne que 18801 litres par jour contre 67464 pour la première approche avec trois véhicules. Il n'est pas surprenant que même si le nombre de clients visités passe de 3351 à 4141, le nombre de pénuries subies soit si élevé.

Ce qu'il importe de retenir à notre avis c'est qu'aucune des deux approches n'a réussi à fournir un service adéquat avec trois(3) véhicules. Que la deuxième ait produit beaucoup plus de pénuries que la première n'est pas concluant. Cela ne fait qu'illustrer la "personnalité" de chaque algorithme; dans le premier on se résigne face à l'adversité en continuant comme si de rien n'était, dans le second on refuse au contraire de croire à l'inévitable et on agit comme si on pouvait encore réussir à sauver le bâteau. L'entreprise qui fait face à une telle situation ne peut rester les bras croisés à regarder les pénuries s'accumuler. Elle ferait appel à des ressources additionnelles: temps supplémentaires, location de véhicules et de chauffeurs. Par conséquent, pour porter un jugement mieux éclairé sur

la valeur de chaque approche, il faudrait, selon nous, inclure dans le modèle la possibilité de recourir à ces ressources supplémentaires. Le problème compterait alors une dimension de plus, celle de devoir déterminer quand et dans quelle mesure utiliser ces ressources de dépannage, toujours dans le but d'éviter toutes pénuries à un moindre coût.

Un commentaire enfin sur les temps d'exécution. Même si nous ne visions pas la mise au point parfaite des programmes, l'écart entre les deux approches est significatif. Si un tel écart devait se maintenir après optimisation des programmes, la deuxième approche se devrait d'être nettement supérieure à la première pour conserver quelqu'intérêt que ce soit.

La première approche est relativement simple et ses programmes également le sont. Il y a certes possibilité d'améliorer mais il reste surtout à optimiser certains paramètres, le seuil définissant l'ensemble E par exemple. Pour la deuxième approche il y a non seulement place à l'amélioration mais plusieurs remèdes sont déjà connus, en voici quelques-uns:

- le calcul et la mémorisation d'une table de distances pour toutes les paires de clients requiert beaucoup de temps et d'espace mémoire. Nous pourrions utiliser une méthode plus simple, n'utilisant que les coordonnées cartésiennes des clients par exemple. Cette amélioration vaut également pour la première approche.

- Nous devons évaluer la fonction $(EC_i')^{-1}$ un très grand nombre de fois. Puisque l'inverse de EC_i' ne s'obtient pas analytiquement, nous avons recours à la bissection, ce qui signifie de nombreuses itérations et un temps d'exécution important. Puisque de toute façon nous devons utiliser un estimé de l'espérance des coûts annuels pour obtenir la

convexité, aussi bien choisir une fonction qui est facilement inversible.

- L'estimé de l'effet d'un échange dans l'algorithme r-OPT , i.e. le $\Delta PA(k_1,k_2,J_1,J_2)$ du chapitre V, pourrait être amélioré. Il faudrait réduire le nombre de cas où le méilleur estimé indique une amélioration importante de la fonction économique alors que l'effet réel de l'échange est une détérioration tout aussi importante. Dans ce cas-ci, il s'agit d'un mal pour lequel nous n'avons aucun remède à proposer.

CHAPITRE VII

CONCLUSION

Notre objectif premier était le développement d'approches de base au problème. Par les deux approches présentées dans ce mémoire et leur implantation informatique, nous croyons l'avoir atteint. Pour aller plus loin vers l'obtention de matériel directement utilisable par l'industrie, plusieurs étapes restent à franchir. Tout d'abord, il est certain que nous n'avons pas exploité le plein potentiel de nos approches. Nous avons mentionné à la fin du chapitre précédent quelques améliorations possibles, plusieurs autres restent à trouver. En ce sens, une série complète de tests devra être menée. Ensuite, certaines hypothèses devront être supprimées pour se rapprocher de la réalité. Je pense en particulier ici à celle supposant connus les degrés-jour des jours à venir. Nous devrons alors introduire un modèle prévoyant ces degrés-jour et tenir compte de l'incertitude accrue à propos de la consommation des clients qui en découlera. De même, nous devrons remettre en question l'hypothèse d'une variance du taux de consommation égale pour tous les clients, et sa valeur de 0.20^2 .

Une autre étape sera l'application des algorithmes sur les données d'une entreprise en opération. Cette étape est indispensable pour non seulement comparer les résultats obtenus de part et d'autres, mais également pour se familiariser avec toutes les contraintes auxquelles doit faire face l'entreprise, et préciser la batterie d'hypothèses que nous avons faites (CAVARI, CAVARO, CAFIXE, CAFIXO, ...).

Enfin, l'addition au modèle de la composante du temps supplémentaire nous apparaît fort importante, non seulement pour ajouter au réalisme mais pour juger de la valeur réelle des algorithmes.

RÉSUMÉ DU VOCABULAIRE ET DES NOTATIONS UTILISÉS

A: estimé du nombre annuel de degrés-jour ; A = 5250 DJ

$$b_{ik} = (r_i - \mu_f \sum_{j=1}^{k} DJ_j)/(\sigma\sqrt{\sum_{j=1}^{k} DJ_j^2})$$

$$B_{ik}(w) = (w - r_i - 25)/(\sigma\sqrt{\sum_{1}^{\Delta_1} DJ_j^2})$$

boucle: trajet parcouru par un chauffeur depuis un départ du dépot et jusqu'à son prochain retour au dépot. Un même chauffeur peut effectuer plusieurs boucles dans une même journée

β_i : niveau du réservoir du client i à l'instant suivant la dernière livraison

$\bar{\beta}_i$: espérance du niveau du réservoir du client i au moment de la prochaine livraison projetée

CAFIXE: temps fixe de livraison chez le client ; CAFIXE = 0.16 hre

CAFIXO: temps fixe de remplissage au dépot; CAFIXO = 0.16 hre

CAPA: capacité de chaque véhicule de livraison; CAPA = 9988 ℓ

CAPCUM(b): sommes des quantités livrées aux clients de la boucle b

CAVARI: temps variable de livraison chez le client;
CAVARI = 0.00006173 hre/ℓ

CAVARO: temps variable de remplissage du dépot; CAVARO = 0.00001543 hre/ℓ

$CONSM_i$: consommation du client i depuis la dernière livraison et jusqu'à midi le jour J ;

$$CONSM_i = \mu_i \times [0.5DJ_{J-nj_i-1} + \sum_{j=J-nj_i}^{J-1} DJ_j + 0.5DJ_J]$$

C_i^j: consommation du client i le jour j ; $C_i^j : N(\mu_i, \sigma^2)$

CT_i: coût de transport pour le client i en cas de livraison normale;

$$CT_i = dis(depot,i) \times \frac{D}{\sum_{j \in b} dis(dépot,j)} + détour_i$$, lorsque i est sur la boucle b

CT_i^j: estimé du coût de transport encouru pour visiter le client i le jour J+j

d_{ik}: demande du client i le jour k (1ère approche); c'est la quantité maximale pouvant être livrée le $k^{ième}$ jour suivant une livraison

dis(x,y): distance pour le trajet direct de x à y

DJ: degré-jour; une température inférieure de 1^oC à 18^oC durant une journée équivaut à 1DJ

DJ_j: nombre de DJ enregistré au cours du jour j

E: ensemble de clients parmi lesquels nous puisons pour construire les routes du jour J . E est le résultat de l'étape de sélection des clients

EC_i^j: estimé de l'espérance du coût annuel pour le client i si w_i^j lui est livré et qu'un coût de transport de CT_i^j est encouru à chaque occasion

$EC_i(w_i)$: (version finale) estimé de l'espérance du coût annuel du client i si w_i lui est livré à chaque occasion;

$EC_i(w_i) = A\mu_i/w_i[CT_i+(K_i-CT_i)F_{ik}(w_i)]$ où k est tel que

$$w_i = \mu_i\Big[\sum_{j=1}^{k-1} DJ_j+SDJ_k\Big) \ , \ S \in [0,1]$$

$$F_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad N_j \leq 78 \\ \dfrac{99-N_j}{99-78} & \text{si} \quad 78 < N_j < 98 \\ \dfrac{0.1}{\ell n(N_j-94.9)} & \text{si} \quad N_j \geq 98 \end{cases}$$

$$f_{ik} = Pr\Big[\sum_{j=1}^{k} C_i^j \leq r_i\Big]$$

$$F_{ik}(w) = F_{N(0,1)}(B_{ik}(w))$$

H: nombre maximum d'heures pouvant être travaillées par un chauffeur quotidiennement

jour de planification: c'est le jour dont nous sommes à planifier les livraisons

K_i: coût de pénalité en cas de pénurie; $K_i = 1331.6\mu_i$

$litr_i$: niveau réel du réservoir du client i à la fin de la journée

$livr_i$: espérance de la livraison nécessaire à complètement remplir le réservoir du client i à midi le jour de planification

M_i: estimé du prochain jour de pénurie du client i s'il n'y a aucune livraison

mj_i: "meilleur jour" de livraison pour le client i, i.e. le jour où son SC_i est atteint en moyenne

μ_i: moyenne du taux de consommation quotidien, en ℓ/DJ

N_j: nombre de clients i dont $mj_i = J+j$

NC: nombre de véhicules disponibles à la livraison

nj_i: nombre de jours complets depuis la dernière livraison

pénurie: état du client dont le réservoir est vide et dont aucune livraison n'est prévue le jour où cela se produit

pred(i): le prédécesseur du client i sur sa boucle

p_{ik}: probabilité de pénurie du client i au $k^{ième}$ jour suivant la dernière livraison étant donné que lors de cette livraison le réservoir a été rempli; $p_{ik} = Pr\left[\sum_{j=1}^{k-1} C_i^j \leq r_i\right] - Pr\left[\sum_{j=1}^{k} C_i^j \leq r_i\right]$

$QTEMAX_i$: quantité maximale pouvant être livrée au client i le jour J ; $QTEMAX_i = r_i - \beta_i + CONSM_i$

r_i: capacité du réservoir du client i, en litres

SC_i: seuil critique pour le client i (en litres). La politique de livraison vise à visiter chaque client le jour même où ce seuil est atteint en moyenne

$succ_i$: successeur du client i sur sa boucle

$$\sum_{1}^{k} DJ_j = 0.5DJ_0 + \sum_{j=1}^{k} DJ_j$$

$$\sum_{1}^{k} DJ_j^2 = (0.5DJ_0)^2 + \sum_{j=1}^{k} DJ_j^2$$

$$\sum_{I} \equiv \sum_{i \in I}$$

σ: écart-type du taux de consommation quotidien

t(x,y): temps nécessaire au trajet direct de x à y à une vitesse moyenne de VITMOY

T_i: taux quotidien de consommation; $T_i : N(\mu_i, \sigma^2)$

TEMCUM(b): temps total de parcours pour la boucle b(incluant transport, livraison et remplissage au dépot)

TEMCUM(0,c): temps total de parcours de toutes les boucles du chauffeur c

VITMOY: vitesse moyenne des véhicules, incluant les arrêts aux intersections; VITMOY = 33 km/hre

w_i: quantité livrée au client i

w_i^j: quantité maximale pouvant être livrée au client i le jour J+j .

REMERCIEMENTS

Je voudrais d'abord remercier mon directeur de mémoire, monsieur Jacques Ferland, professeur titulaire au département d'informatique et de recherche opérationnelle. Il m'a témoigné au cours des derniers mois une disponibilité et une qualité d'écoute exemplaires. Si la terminaison de ce mémoire constitue pour moi un grand soulagement, il en est de même pour mes proches dont les encouragements et la patience n'ont jamais fait défaut. A ma famille immédiate et à Guylaine, un merci particulier.

Je remercie enfin madame Thérèse Ouellet qui a réalisé la dactylographie de ce mémoire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAZARAA, M. and SHETTY, C., "Nonlinear Programming: Theory and Algorithms", Wiley, New York, 1979.

[2] BODIN, L., GOLDEN, B., ASSAD, A. and BALL, M., "The State of the Art in the Routing and Scheduling of Vehicules and Crews", Computers & OR (special issue), June 1983.

[3] CHRISTOFIDES and EILON, S., "An Algorithm for the Vehicule-Dispatching Problem", Operational Research Quaterly, 20, 1969, 309-318.

[4] CROES, G.A., "A Method for Solving Travelling-Salesman Problems", Operations Research, 6, 1958, 791-812.

[5] DIJKSTRA, E.W., "A Note on Two Problems in Connexion with Graphs", Numerical Math., 1, 1959, 269-271.

[6] DROR, M., "The Inventory Routing Problem", Ph.D. Thesis. University of Maryland, 1983.

[7] FEDERGRUEN, A. and ZIPKIN, P., "A combined Vehicule Routing and Inventory Allocation Problem", Working Paper #345A, Graduate School of Business, Columbia University, New York, June 1980.

[8] FEDERGRUEN, A. and ZIPKIN, P., "Solution Techniques for some Allocation Problems", Working Paper #329A, Graduate School of Business, Columbia University, New York, May 1980.

[9] GARLEY, M. and JOHNSON, D., "Computers and Intractability", Freeman, San Francisco, 1979.

[10] GOLDEN, B., BODIN, L., DOYLE, T. and STEWART, W. Jr., "Approximate Travelling-Salesman Algorithms", Technical Report #77-005, College of Business and Management, University of Maryland, May 1977.

[11] LIN, S., "Computer Solutions of the Travelling-Salesman Problem", Bell System Technical Journal, 44, 1965, 2245-2269.

[12] LIN, S. and KERNIGHAM, B., "An effective heuristic Algorithm for the Travelling Salesman Problem", Operations Research, 21, 1973, 498-516.

[13] SPIEGEL, M., "Théorie et applications de l'analyse", Série Schaum, McGraw-Hill, New York, 1973.